Maria João Tinoco

Isometrias

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
2012

Maria João Tinoco

Isometrias

Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
2012

Agradecimentos

Para começar, gostaria de agradecer aos meus queridos pai e mãe, Lauro e Aninhas, pelo exemplo que desde sempre me transmitiram, de serenidade, dedicação e empenho e principalmente o gosto pelo estudo e pela descoberta... eternamente grata por tudo o que me ensinaram! Ainda hoje aprendo com eles...

Agradeço também à Paula, minha irmã muito amiga, de sonhos e fantasias, que me deu toda a força e apoio moral para eu completar, e seguir em frente nesta aventura. Obrigada pelas palavras de coragem.

Ao meu Zé, agradeço a paciência e compreensão, que demonstrou ao longo destes dois difíceis anos, em que os horários ficaram um pouco mais impossiveis... ao Vasco e à Inês, filhos muito especiais, fonte de inspiração e amor, espero ter transmitido um pouco da minha vontade em aprender!

Não posso deixar de agradecer a ajuda muito preciosa da Vera, Diana e Paulo, alunos como eu deste mestrado, pela partilha e identificação, em todos aqueles momentos em que este desafio parecia não ter fim, mas um dia de cada vez, juntos os fomos ultrapassando. À Rosário claro, agradeço o cruzar semanal em que fazíamos o ponto da situação de avanços e recuos (mais avanços e menos recuos), que sempre me fez sentir confiante, mesmo quando as dificuldades pareciam querer vencer.

Aos meus alunos agradeço, pois tudo isto também foi a pensar neles, e serão eles que irão usufruir de eu me sentir melhor preparada na incrível tarefa de ensinar matemática!

Agradeço também a todos os professores do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto com quem me cruzei, pelo seu profissionalismo e humanidade, sempre disponíveis para auxiliarem quando tal foi necessário e que tornaram possível a concretização deste meu sonho.

E por último agradeço ao Professor Doutor José Carlos Santos, meu orientador nesta tese de mestrado, a sua discreta paciência, às minhas infinitas dúvidas. Fico com uma imensa dívida de gratidão pela forma excecional como, naturalmente, todo este processo se foi desenvolvendo: muito obrigada!

Resumo

Neste estudo foram desenvolvidas aplicações informáticas para serem manipuladas pelos alunos, para os motivar e auxiliar na aprendizagem do um dos temas da Geometria: as isometrias. Este tema é atualmente ensinado a alunos do ensino básico, desde o primeiro ao terceiro ciclo. As aplicações realizadas, foram pensadas para serem utilizadas por alunos a partir do terceiro ciclo ou por alunos com curiosidade em saberem mais sobre este tópico.

Para o efeito, foram criadas páginas em HTML, de fácil manipulação pelo utilizador, onde vão surgindo algumas situações em *software* de Geometria dinâmica, nas quais o aluno é desafiado a interagir: o programa utilizado nestes *applets* foi o *GeoGebra*.

Pretende-se que o aluno, complemente a sua aprendizagem sobre isometrias: nos manuais escolares de matemática onde este tema é tratado, é apresentada ao aluno a existência dos quatro tipos de isometrias do plano. Com a exploração destas aplicações, o aluno deverá investigar porque só existem estas quatro possibilidades, utilizando para isso, a composição de isometrias.

Assim, faz parte integrante desta tese, um CD-ROM contendo estas aplicações em HTML. As aplicações informáticas em referência, foram criadas tendo em consideração o seu público-alvo: tentou-se, sempre que possível, que os *applets* fossem visualmente atraentes, usando cores e formas apelativas, e ao mesmo tempo, o mais simples possíveis, para estimular e motivar o aluno. Algumas aplicações informáticas, têm disponível uma ajuda, onde aparecem construções auxiliares, sempre acompanhadas de um breve texto de apoio.

No sentido de enquadrar este trabalho no currículo oficial de Matemática, foi feita uma leitura atenta aos vários documentos que atualmente orientam o ensino/aprendizagem de Matemática nas escolas portuguesas, dos vários níveis de ensino, sendo focadas as principais questões relacionadas com as isometrias e a utilização de programas de Geometria dinâmica.

Para dar sustentabildade teórica e rigor científico a todo este processo, foi realizada uma cuidadosa investigação sobre o tema em estudo, as isometrias, sendo apresentados nesta tese os vários conceitos, teoremas e proposições, fundamentais para este trabalho. Incluiu-se também nesta secção, uma breve nota histórica, considerada importante e reveladora da evolução de alguns dos conceitos abordados ao longo deste estudo. Na

parte final do capítulo onde são apresentadas as bases teóricas desta tese, é feita uma ponte entre Geometria e Álgebra, através da teoria de grupos: aproveitou-se o conhecimento detalhado das isometrias e suas propriedades para o aplicar ao estudo de um dos conceitos centrais da Álgebra – grupos.

Por último, é feito o balanço de todo o trabalho desenvolvido, através de uma reflexão pessoal, onde são também apontadas alguns fatores que poderão influir, na opinião da autora deste estudo, no sucesso do ensino da Matemática nas escolas portuguesas. Estes fatores e pistas para o futuro, são reflexo da experiência e das situações vividas diariamente, com alunos e com outros professores, por todas as escolas onde passou.

Conteúdo

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Capítulo 1

Objetivo

O objetivo principal deste trabalho é, através da utilização das novas tecnologias, como facilitadora da aquisição de conhecimentos e aprendizagens, motivar e suscitar a atenção de alunos, para investigarem sobre o tópico das isometrias. Pretende-se também abrir portas e indicar caminhos, que alunos mais curiosos poderão explorar para ampliar os seus conhecimentos, podendo mesmo, em última análise, descobrir novas conexões e ligações, para além deste estudo. A motivação para o gosto e o prazer do estudo da Matemática, o transmitir que existe sempre algo para desvendar, são também objetivos implícitos neste estudo.

Espera-se que os alunos, depois de identificarem e caraterizarem os diferentes tipos de isomerias no plano, utilizem a composição de isomerias e investiguem o resultado, quando se compõem, por exemplo, duas reflexões.

Para auxiliar os alunos neste processo de investigação, foram criadas aplicações em *software* de Geometria dinâmica, que podem ser manipuladas e alteradas pelos próprios alunos. Pretendeu-se que as aplicações fossem apelativas e estimulantes, e que representassem um desafio aos seus utilizadores.

Após esta investigação, os alunos poderão mais facilmente perceber, porque é que só existem quatro tipos de isometrias do plano: translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante.

Tendo em vista a concretização do objetivo principal, foram analisados os atuais programas de Matemática, publicados pelo Ministério da Educação e Ciência, para os vários níveis de escolaridade, desde o 1º ciclo até ao ensino secundário, no sentido de enquadrar este trabalho com as mais recentes alterações às orientações programáticas.

Foi ainda fundamental, para dar suporte teórico e científico a este trabalho, realizar uma profunda investigação sobre as isometrias, onde estão apresentados os vários conceitos e teoremas, importantes para o referido estudo. Esta investigação deu também origem, ao registo de algumas referências históricas, tão ao gosto de alunos de qualquer idade. Por fim, aproveitou-se este conhecimento recém adquirido das isometrias e suas propriedades, para fazer uma incursão na Álgebra, através da teoria de grupos, tendo sido utilizados exemplos e conceitos definidos e demonstrados anteriormente, embora tenha sido necessário, pontualmente, efetuar novas demonstrações. Os exemplos utilizados, são situações concretas onde as isometrias se conseguem visualizar, sendo aplicados a definições com crescente abstração.

Capítulo 2

Introdução

Neste capítulo irei, em primeiro lugar, fazer o ponto da situação do ensino da Geometria, e das isometrias em particular, nas escolas básicas e secundárias portuguesas, focando a evolução em termos de orientações programáticas.

Refiro que, devido a alguns dos documentos oficiais mencionados, terem sido recentemente alterados e inclusivamente revogados, é provável que, na presente conjuntura de mudança, da política da educação do nosso país, os documentos mencionados deixem de estar atualizados, e possam mesmo ser substituídos.

Mais à frente, apresentarei as razões que me motivaram a realizar esta investigação, quer em termos de enriquecimento pessoal, quer em termos da minha carreira como docente de Matemática.

Por fim, farei um resumo sobre as aplicações em Geometria dinâmica efetuadas, fundamentando as escolhas do *software* utilizado, assim como os exemplos escolhidos para os alunos investigarem.

2.1 Programa de Matemática do Ensino Básico e Secundário

2.1.1 Os programas de Matemática

O Novo Programa de Matemática do Ensino Básico — NPMEB, homologado em Dezembro de 2007, constitui um reajustamento ao Programa de Matemática para o Ensino Básico. O anterior programa, datado do início dos anos noventa (1990 para o 1º ciclo [13] e 1991 para o 2º e 3º ciclos [14], [15]), desde há muito que necessitava de ser revisto.

A publicação, em 2001, do Currículo Nacional do Ensino Básico [16], introduziu modificações curriculares importantes em relação ao anterior programa, em particular nas finalidades e objectivos de aprendizagem, valorizando a noção de competência Matemática, e a forma como apresenta os temas matemáticos a abordar. Este documento, no entanto, foi recentemente revogado, com publicação em Diário da República [20], 2ª série — Nº 245 — 23 de Dezembro de 2011, do qual se reproduz, de seguida, uma passagem em que se apresentam as razões que sustêm tal decisão.

«O documento (...) continha uma série de insuficiências que na altura foram debatidas, mas não ultrapassadas, e que, ao longo dos anos, se vieram a revelar questionáveis ou mesmo prejudiciais na orientação do ensino. Por um lado, o documento não é suficientemente claro nas recomendações que insere. Muitas das ideias nele defendidas são demasiado ambíguas para possibilitar uma orientação clara da aprendizagem. A própria extensão do texto, as repetições de ideias e a mistura de orientações gerais com determinações dispersas, tornaram-no num documento curricular pouco útil. Por outro lado, o documento insere uma série de recomendações pedagógicas que se vieram a revelar prejudiciais.

Em primeiro lugar, erigindo a categoria de «competências» como orientadora de todo o ensino, menorizou o papel do conhecimento e da transmissão de conhecimentos, que é essencial a todo o ensino. Em segundo lugar, desprezou a importância da aquisição de informação, do desenvolvimento de automatismos e da memorização. Em terceiro lugar, substituiu objectivos claros, precisos e mensuráveis por objectivos aparentemente generosos, mas vagos e difíceis, quando não impossíveis de aferir.» [20]

No entanto, apesar desta recente revogação de um dos documentos oficiais, que orientava o ensino básico nas escolas portuguesas de todas as áreas disciplinares, os programas oficiais curriculares de Matemática, mantém-se em vigor, à data de apresentação deste trabalho.

O desenvolvimento do conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática nos últimos quinze anos e a necessidade de melhorar a articulação entre os programas dos três ciclos, são algumas das razões que justificavam a revisão do Programa de Matemática para o ensino básico.

Indica-se de seguida, de forma resumida, a estrutura geral e os pontos principais do NPMEB.

O NPMEB, numa primeira parte da sua redação, enuncia as duas finalidades primordiais do ensino da Matemática, nos seguintes termos:

— Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados.

— Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência.

Ao indicar as finalidades do ensino da Matemática, por esta ordem, entende-se que só faz sentido falar de atitudes positivas e apreciação da Matemática por parte do aluno, tendo por base o seu conhecimento e a sua capacidade de mobilização desse conhecimento em situações diversas, ou seja, em primeiro lugar é necessário o conhecimento para depois o aluno saber apreciar a Matemática.

De acordo com o NPMEB, estas finalidades serão concretizadas através de nove objetivos gerais do ensino da Matemática. Destes, o primeiro refere o conhecimento básico, e o segundo diz respeito à importância da compreensão na aprendizagem da Matemática. Os cinco objetivos seguintes referem-se a capacidades transversais, tendo três deles (o raciocinar matematicamente, a resolução de problemas e a comunicação Matemática) lugar de destaque no novo programa. Os dois últimos objetivos, dizem respeito ao modo como se espera que os alunos se relacionem pessoalmente com a Matemática, e apreciem esta disciplina.

Os objetivos gerais do ensino da Matemática do NPMEB são:

— Conhecer fatos e procedimentos próprios da Matemática.

— Compreender a Matemática

— Lidar com diversas representações matemáticas

— Comunicar matematicamente

— Raciocinar matematicamente

— Resolver problemas

— Estabelecer conexões

— Fazer Matemática de modo autónomo

— Apreciar a Matemática

De seguida, é explicada a organização dos temas matemáticos, o que o diferencia significativamente dos programas anteriores. Por exmplo, uma das principais diferenças é a revalorização da Álgebra, que não existia no 1^{o} nem no 2^{o} ciclo, e que no 3^{o} ciclo tinha sido reduzida ao cálculo algébrico.

Assim, os conteúdos matemáticos encontram-se divididos nos seguintes quatro temas:

— Números e operações

— Geometria e Medida

— Álgebra

— Organização e tratamento de dados

Outra diferença fundamental do NPMEB, é existirem capacidades transversais em paralelo com os temas matemáticos, não havendo uma formulação comparável em nenhum dos anteriores programas.

Por último, o NPMEB apresenta diversas orientações metodológicas gerais, nomeadamente, utilização de tarefas diversificadas, resolução de problemas, raciocínio matemático, comunicação matemática (sendo estes três itens, de acordo com o NPMEB, não só objetivos gerais como também orientações metodológicas a seguir na prática letiva), conexões, representações, diversidade de recursos, cálculo mental, referência à História da Matemática e a atenção ao papel da Matemática no mundo atual e, finalmente, as diferentes formas de trabalhar na sala de aula.

Um dos documentos programáticos de referência e que serviu de base e de orientação, na reformulação do NPMEB, foi o NCTM — Princípios e Normas para a Matemática Escolar [19]: o NCTM, de origem norte americana e traduzido para português pela APM — Associação de Professores de Matemática, é «um processo contínuo que visa melhorar a educação Matemática (...), e é o resultado de vários grupos de trabalho que refletiram nos programas de Matemática, desde o pré-escolar até ao 12º ano». Este manual fornece inúmeras indicações e sugestões, tais como por exemplo a «utilização das tecnologias e do *software* de Geometria dinâmica, que permitam ao aluno formular e testar conjeturas: a visualização possibilitada por estas ferramentas facilita o raciocínio geométrico, no plano e no espaço», é uma das sugestões deste texto. O rigor científico e os termos e linguagem utilizados, para descrever e interpretar situações de congruência de figuras e de transformações geométricas, é também alvo de extrema atenção, assim como a articulação entre os vários ciclos de ensino.

Relativamente ao programa de Matemática do Ensino Secundário, a sua última versão data de 2001, no caso do 10º ano, e de 2002 para o 11º e 12º anos de escolaridade.

É provável que também os programas de Matemática do ensino secundário sejam atualizados num futuro próximo, mas no que diz respeito a este estudo, o ensino das isomerias e a utilização dos programas de Geometria dinâmica, é quase certo que se mantenham as orientações metodológicas sobre esta temática.

2.1.2 As isometrias e os programas de Geometria dinâmica

Relativamente à Geometria, e particularmente ao tema das isometrias, o Novo Programa de Matemática do Ensino Básico, introduziu recentemente profundas alterações e reajustamentos.

Além da necessidade de melhorar a articulação entre os três ciclos iniciais da escolaridade obrigatória, conforme já referido, «As isometrias, que começam a ser abordadas no 1º ciclo e utilizadas no estudo dos frisos, são aprofundadas no 2º ciclo, especialmente a reflexão e a rotação» [17] , no sentido de existir uma continuidade na forma de abordar os conceitos, também foi ampliado o grau de conhecimentos a adquirir pelos alunos, ao lecionar este tema ao longo de todo o ensino básico.

No anterior programa, não era dada relevância à composição de isometrias, a não ser no caso das translações, não sendo sequer referida a reflexão deslizante, como uma das quatro isometrias do plano — os manuais escolares do 9º ano de escolaridade, referentes ao anterior programa, continham normalmente uma referência muito breve às isometrias, do tipo: «As translações, as rotações e as simetrias são isometrias: numa isometria uma figura é transformada numa outra com a mesma forma e com as mesmas dimensões» [7].

Assim, por exemplo a composição de isometrias passou a ser abordada logo no 2º ciclo, devendo os alunos estar familiarizados com situações como identificar, predizer e descrever a isometria em causa, dada uma figura geométrica e o seu transformado ou construir o transformado de uma figura, a partir de uma isometria ou de uma composição de isometrias, não sendo estas questões contempladas no anterior programa.

Uma alteração de relevo em relação ao programa anterior, é que se estudam, desde o 1º ciclo, diversas transformações geométricas, primeiro de forma intuitiva e depois, com crescente formalização.

O novo programa refere como essencial o uso de instrumentos como a régua, esquadro, compasso e transferidor e também calculadoras e computadores. Vai ainda mais longe, e é específico ao salientar a importância da utilização pelos alunos de *software* de Geometria dinâmica, principalmente em situações que promovam o desenvolvimento do espírito hipotético-dedutivo.

Relativamente à utilização da tecnologia, é referido que «Ao longo de todos os ciclos, os alunos devem usar calculadoras e computadores na realização de cálculos complexos, na representação de informação e na representação de objetos geométricos. O seu uso é particularmente importante na resolução de problemas e na exploração de situações, casos em que os cálculos e os procedimentos de rotina não constituem objetivo prioritário de aprendizagem, e a atenção se deve centrar nas condições da situação, nas estratégias de resolução e na interpretação e avaliação dos resultados».

O NPMEB [17] refere ainda que, no 2º ciclo «Os programas computacionais de Geometria dinâmica e os *applets* favorecem igualmente a compreensão dos conceitos e relações geométricas, pelo que devem ser também utilizados», referindo no 3º ciclo que «Os alunos devem recorrer a *software* de Geometria dinâmica, sobretudo na realização de tarefas exploratórias e de investigação».

Refere também que no 2º ciclo, [17], «O estudo da Geometria deve ter como base tarefas que proporcionem oportunidades para observar, analisar, relacionar e construir figuras geométricas e de operar com elas. As tarefas que envolvem as isometrias do plano devem merecer atenção especial neste ciclo, sobretudo as que dizem respeito a reflexões e rotações, pois permitem a aprendizagem de conceitos geométricos de forma dinâmica e o aprofundamento da sua compreensão. As isometrias permitem desenvolver nos alunos o conceito de congruência (figuras congruentes relacionam-se entre si através de reflexões, rotações, translações ou reflexões deslizantes)».

O estudo do tema das isometrias, iniciado no 1º ciclo e retomado no 2º ciclo, aprofunda-se no 3º ciclo com o estudo da translação. Este tópico compreende uma abordagem geométrica e uma abordagem vetorial. Faz-se também uma sistematização e comparação das propriedades das diversas isometrias. Espera-se que os alunos se familiarizem com o processo de demonstração Matemática, nomeadamente ao demonstrarem propriedades e relações que encontram ao realizarem atividades de investigação.

Na resolução de problemas geométricos, como também nas tarefas exploratórias e de investigação, é importante que os alunos tenham um tempo apropriado para realizar experiências, elaborar estratégias, formular conjeturas, descrever processos e justificá--los com rigor progressivo. Ao elaborarem justificações, produzindo pequenas cadeias dedutivas, familiarizam-se com o processo de demonstração e iniciam o raciocínio geométrico dedutivo. Os alunos devem recorrer a *software* de Geometria dinâmica, sobretudo na realização de tarefas exploratórias e de investigação.

Relativamente aos programas de Matemática do ensino secundário, que se encontram divididos por ano de escolaridade e por tipo de curso a que dão acesso no ensino universitário, não existe referência direta ao tema das isometrias, sendo no entanto interessante referir que uma das referências bibliográficas utilizadas, é o manual *Curso de Geometria* de Paulo Ventura Araújo, [1], que foi um dos livros consultados durante este estudo.

As orientações metodológicas no ensino secundário são bem claras quanto à utilização das tecnologias: «A utilização obrigatória da tecnologia que, além de ferramenta, é fonte de atividade, de investigação e de aprendizagem, pretende também preparar os estudantes para uma sociedade em que os meios informáticos terão um papel considerável na resolução de problemas de índole científica.»

Acrescenta ainda que «Todas as Escolas Secundárias devem dotar-se quanto antes de Laboratórios de Matemática. O computador, pelas suas potencialidades, nomeadamente nos domínios da Geometria dinâmica, da representação gráfica de funções e da simulação, permite atividades não só de exploração e pesquisa como de recuperação e desenvolvimento, pelo que constitui um valioso apoio a estudantes e professores, devendo a sua utilização considerar-se obrigatória neste programa. Vários tipos de programas de computador são muito úteis e enquadram-se no espírito do programa. Os programas de Geometria dinâmica, de cálculo numérico e estatístico, de gráficos e simulações e de álgebra computacional fornecem diferentes tipos de perspetivas tanto a professores como a estudantes. O número de programas disponíveis no mercado português aumenta constantemente. Neste sentido recomenda-se enfaticamente o uso de computadores, tanto em salas onde os estudantes poderão ir realizar trabalhos práticos, como em salas com condições para se dar uma aula em ambiente computacional (nomeadamente nos Laboratórios de Matemática)(. . .). Os estudantes devem ter oportunidade de trabalhar diretamente com um computador».

Concluindo, os programas de Matemática dos vários níveis de ensino, são claros quanto à utilização das tecnologias pelos alunos, em sala de aula, fazendo referência direta aos programas de Geometria dinâmica.

Apesar da utilização dos computadores nas aulas de Matemática estar explicitamente referida nos programas de Matemática dos vários níveis de ensino, a realidade de algumas escolas está bem distante desta situação.

2.2 Experiência como professora de Matemática

Ser professor, hoje em dia, é um desafio. Ser professor de Matemática, é um desafio ainda maior.

Nos dias de hoje, o papel de um professor, não se resume a preparar aulas, a dar essas mesmas aulas e a avaliar os alunos. Se fosse só isto, era simples.

Nas escolas básicas e secundárias portuguesas, espera-se que o professor, além dessas funções, tenha muitos outros atributos, tais como saber gerir a indisciplina e o conflito latentes em cada aula, educar e transmitir o saber-estar numa sala de aula, conhecer a história pessoal e social de cada aluno, contactar com as famílias desses alunos, em caso de se aperceber de algo grave, remeter a situação a outras instâncias, ensinar mesmo que os alunos não queiram aprender, justificar porque não querem aprender, explicar o insucesso nos testes e exames nacionais, etc, etc, etc ... e como é fácil de ver, a Matemática está sempre na berlinda.

Já dei aulas em vários tipos de escolas, básicas e secundárias, de zonas favorecidas, de zonas pouco favorecidas, de zonas urbanas, de zonas rurais, e a diversos tipos de alunos, desde alunos institucionalizados a alunos com necessidades educativas especiais, alunos motivados, com vontade e curiosidade de aprender a alunos sem qualquer interesse em ouvir sequer uma palavra ou escrever um único número!

E os obstáculos não se resumem aos alunos, mas também a toda a burocracia que é necessário vencer e principalmente distinguir a que é realmente importante, daquela que para nada serve, e para a qual ninguém olha!

O verdadeiro desafio é, apesar de todos estes obstáculos, conseguir-me manter a mim própria motivada e com esperança de que, na aula seguinte, os alunos estejam mais atentos, mais participativos e com vontade de alcançar o conhecimento, a sabedoria... a Matemática.

A minha experiência como professora de Matemática tem sido orientada por duas preocupações fundamentais:

— Em primeiro lugar transmitir aos meus alunos os conceitos e as ideias que os façam reconhecer a Matemática como algo presente em tudo que os rodeia, e que compreendam o uso que dela fazem;

— Em segundo lugar, proporcionar aos alunos experiências motivadoras, com significado e que contribuam para a sua aprendizagem.

Esta última preocupação, tem feito com que realize algumas pesquisas, quer sobre os tópicos da Matemática, quer sobre a forma de os apresentar aos alunos. Também me motivou na procura de ações de formação contínua, e como é óbvio, na inscrição neste Mestrado em Matemática para Professores.

Quase naturalmente, coincidiu no tempo esta minha troca de papeis, como aluna deste mestrado, com a implementação do NPMEB, com todas as suas novidades, e claro me ajudou, ao assumir de novo o meu papel como professora.

É óbvio que todo este trabalho de reflexão e pesquisa sobre isometrias, não poderia ter sido mais atual e enriquecedor, facilitando-me a preparação das aulas em que apresentei este tema aos meus alunos.

No âmbito da preparação das aulas sobre este tema, efetuei uma pesquisa exaustiva a quase todos os manuais de Matemática do 8º ano de escolaridade existentes no mercado, e pude constatar que, ao tratarem este tema, nem sempre os autores foram rigorosos ao definirem isometria.

A articulação entre ciclos, ao nível da Matemática, do ensino básico, também se verificou na escola onde leciono, de acordo com o NPMEB. Assim, pela primeira vez, professores do 1º, do 2º e do 3º ciclo, reuniram para aferirem conteúdos, métodos e estratégias, e obviamente, fui incluída no grupo que tratou as isometrias, o qual liderei.

Constatei que o tema era «mesmo» novidade, nalguns aspetos, para a maioria dos intervenientes, sendo realmente importantes estas reuniões de articulação: a troca de ideias e de experiências entre professores de Matemática e professores do 1º ciclo, é fundamental para a concretização dos objetivos indicados no NPMEB.

2.3 Os alunos e o *software* de Geometria dinâmica

Na verdade, não existem receitas nem fórmulas mágicas, para que os alunos aprendam a Matemática e tenham sucesso, se é que sucesso se pode traduzir, por uma nota num exame final.

Nos meus primeiros anos como docente, estive cada ano letivo, numa escola diferente, e observei que o que funciona para um grupo de alunos, nem sempre funciona para outros. No entanto, de uma forma geral, os alunos reagem positivamente às novas tecnologias, e rapidamente dominam com alguma perícia o *software* que lhes for apresentado.

Não há dúvida que um grupo de alunos pouco motivados para a Matemática, de repente se transforma num grupo de alunos aplicado, se o professor os colocar em frente a um computador com um programa de Geometria dinâmica, e claro com uma tarefa devidamente preparada para este efeito. Esta afirmação é feita de acordo com a minha experiência recente como professora.

Mas não é possível estabelecer uma correspondência direta entre esta «aparente» vontade de aprender dos alunos, com as suas efetivas aprendizagens.

Embora seja consensual que os computadores e todas as aplicações informáticas disponíveis, representem um avanço fundamental no ensino e aprendizagem da Matemática, com potencialidades quase infinitas, também se deve olhar com cuidado este percurso, para não se cair em (também potenciais) ratoeiras.

Michael de Villiers, professor na Universidade de KwaZulu-Natal, nos Estados Unidos da América, no seu artigo *Some pitfalls of dynamic software* [12], aponta para algumas possíveis ratoeiras na utilização de *software* de Geometria dinâmica.

Uma das mais óbvias é a utilização dos programas de Geometria dinâmica para fazer exatamente as mesmas coisas que eram feitas com papel e lápis: neste caso, o ganho seria praticamente nulo, o importante será aprender a fazer coisas que seriam impossíveis de executar anteriormente. Não se trata só de alterar o modo de ensinar, outras questões devem ser cuidadosamente analisadas, tais como repensar o currículo, mudar a ordem dos tópicos ou mesmo introduzir outros temas.

Outra armadilha apontada por Michael Villiers é assumir-se que os alunos só podem utilizar o *software* de Geometria dinâmica quando forem «profissionais», o que, na opinião do autor, não poderia estar mais longe da verdade. Ainda uma outra, resultado talvez de uma má interpretação do construtivismo, é quando os os alunos utilizam primeiro a Geometria dinâmica para construir figuras geométricas, como quadrados, rectângulos, etc., antes de explorarem e conhecerem as suas propriedades. O autor indica mais algumas ratoeiras e armadilhas que podem ocorrer na utilização deste tipo de *software*, podendo algumas ser evitadas, mas provavelmente é importante que o professor descubra, pela sua própria prática letiva, como evitar essas ratoeiras!

O ideal seria que este *software*, estivesse disponível em todas as salas, para todos os alunos, em qualquer aula, e que os alunos, quando o utilizassem, absorvessem por osmose, todos os seus ensinamentos, mas como sabemos a realidade, o dia-a-dia nas escolas, é bem diferente.

No entanto, apesar de todas estas armadilhas, considero que uma utilização do *software* de Geometria dinâmica, devidamente cuidada e planificada, com plena consciência que por vezes é necessário cair em algumas das ratoeiras (como o próprio Michael Villiers provavelmente também caiu!), para avançar, é útil e motivadora, quer para professores, quer para alunos.

Assim, este trabalho inclui algumas aplicações feitas em *software* de Geometria dinâmica, com o objetivo de os alunos manipularem essas mesmas aplicações, para investigarem sobre questões que lhes vão sendo colocadas, como mais a diante será detalhadamente explicado.

O *software* de Geometria dinâmica selecionado para este estudo, foi o *GeoGebra*, por ser o mais utilizado nas escolas portuguesas. O *GeoGebra* é também utilizado em todos os recursos informáticos, que acompanham os manuais escolares de Matemática, sendo referido em várias tarefas nos próprios manuais.

2.4 Aplicações em *GeoGebra*

A vertente prática e pedagógica deste estudo, surge sob a forma de várias aplicações informáticas, criadas em *software* de Geometria dinâmica, tendo sido utilizado o *GeoGebra*: conforme já referido anteriormente, a escolha deste programa de Geometria dinâmica, entre os vários disponíveis, deveu-se a vários fatores, nomedamente por ser o programa atualmente mais utilizado nas escolas e também nos manuais escolares de Matemática.

Os *applets* criados foram inseridos em páginas de HTML, para poderem ser facilmente disponibilizados *online*. O programa utilizado para criar os ficheiros HTML e inserir neles os *applets* foi o *Kompozer*, que se trata de um editor de HTML de distribuição livre.

Estes ficheiros encontram-se em anexo a este documento, num CD-ROM: o utilizador deverá iniciar a visualização desta aplicação selecionando o ficheiro `index.html`. Este ficheiro é o motor central da aplicação, reencaminhando o utilizador para outros ficheiros e para outras visualizaçoes, sempre que tal for necessário.

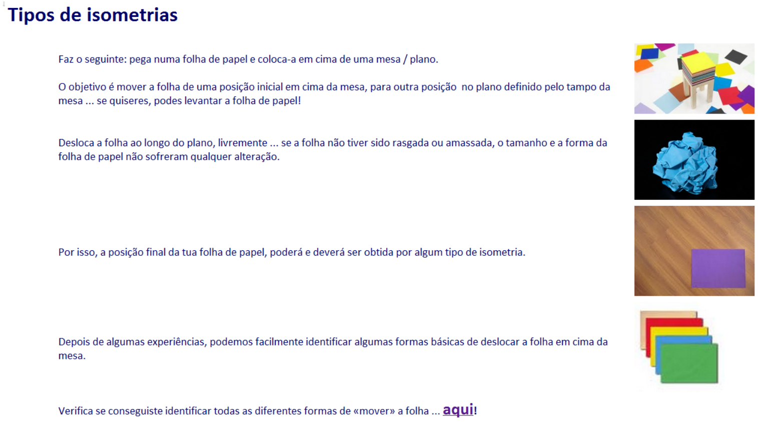
De uma forma resumida, depois de uma introdução inicial explicando o significado da palavra isometria, são dadas a conhecer as quatro isometrias, através de vários *links*, podendo o aluno navegar na direção que lhe aprouver. Após esta etapa, é investigada a composição de isometrias, sendo efetuado no final, um ponto da situação das conclusões alcançadas. De seguida, é analisado o resultado quando se fazem uma, duas ou três reflexões, em diferentes condições. É também investigado o número de reflexões necessário para transformar uma figura noutra figura congruente, assim como o números de pontos necessário para caraterizar uma isometria. Por fim, é apresentada a classificação das isometrias, terminando a aplicação.

Algumas das imagens incluídas nestes *applets* foram retiradas de vários *sites* da *Internet*. Veja-se `http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap26.html`; as restantes imagens foram obtidas de diversos sites obtidos fazendo uma busca em `http://images.google.com` por «edificio niemeyer belo horizonte», «imagens de M. C. Escher» e «imagens de discos de vinil», nomeadamente.

Descrição detalhada da estrutura e das várias etapas e *links* do ficheiro `index.html`:

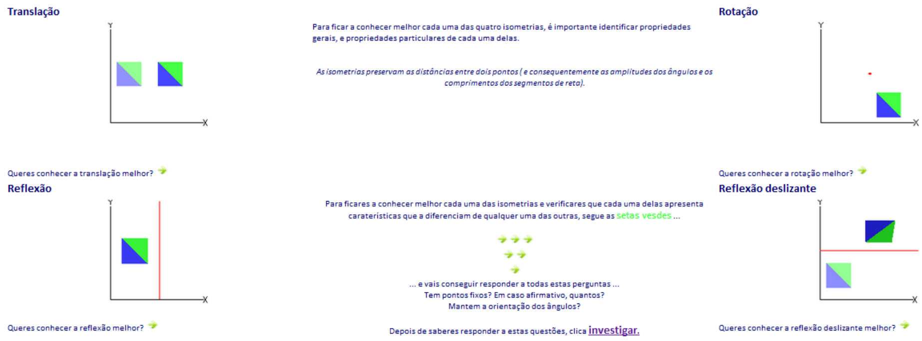
— Começa por fazer uma pequena introdução às isometrias, explicando o significado deste tipo de transformação geométrica, abordando também o conceito de figuras congruentes. As imagens utilizadas no ecrã inicial são de M.C.Escher, pela beleza dos desenhos e também pela curiosidade que provocam, habitualmente, em quem as observa.

— Refere isometria como movimento rígido, e sugere a realização de uma atividade em que o aluno deverá deslocar uma folha de papel ao longo do plano definido pelo tampo da sua mesa.



— Depois de realizar esta atividade, o aluno é questionado se conseguiu identificar diferentes formas de mover a sua folha e, através de uma hiperligação, deverá verificar as suas respostas.

— A hiperligação abre uma nova página onde surgem os quatro tipos de isometrias. Nesta página, várias possibilidades existem: o aluno poderá saber detalhadamente no que consiste cada tipo de isometria, poderá consultar um quadro resumo sobre as propriedades das diferentes isometrias, e finalmente prosseguir na exploração, voltando ao ficheiro inicial.

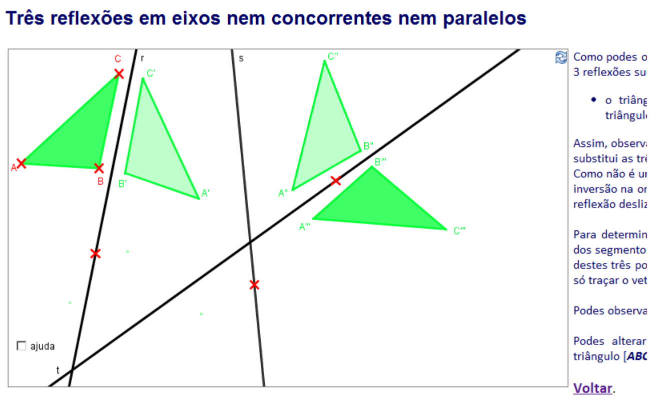


— De novo no ficheiro inicial, `index.html`, depois de verificar que as isometrias existem em inúmeras situações do dia-a-dia, o aluno é convidado a investigar sobre a composição de isometrias.

— Nesta etapa, o alunos tem três opções: composição de duas rotações, composição de duas reflexões em eixos paralelos e composição de duas reflexões em eixos concorrentes. Estas opções são acionadas através de hiperligações, nas quais o aluno, depois de as explorar, poderá voltar e continuar o processo.

— É apresentado ao aluno um resumo da composição de isometrias.

— Neste fase da exploração, chama-se a atenção do aluno para a composição de reflexões: o aluno é agora motivado para descobrir o que acontece quando se compõem três reflexões, em diferentes condições, isto é variando a posição relativa dos eixos de reflexão. A imagem seguinte ilustra a situação em que os três eixos de reflexão não são paralelos nem concorrentes.



— De seguida, é sugerido ao aluno que verifique quantas reflexões (no máximo) são necessárias para transformar uma figura noutra figura congruente, quando as figuras têm a mesma orientação e quando as figuras não têm a mesma orientação.

— Como última atividade de exploração, o aluno deverá verificar que uma isometria fica completamente definida se forem conhecidos três pontos não colineares a as respetivas imagens.

— Por fim, é apresentada ao aluno a classificação das isometrias.

A estrutura geral do ficheiro HTML encontra-se representada no seguinte fluxograma:

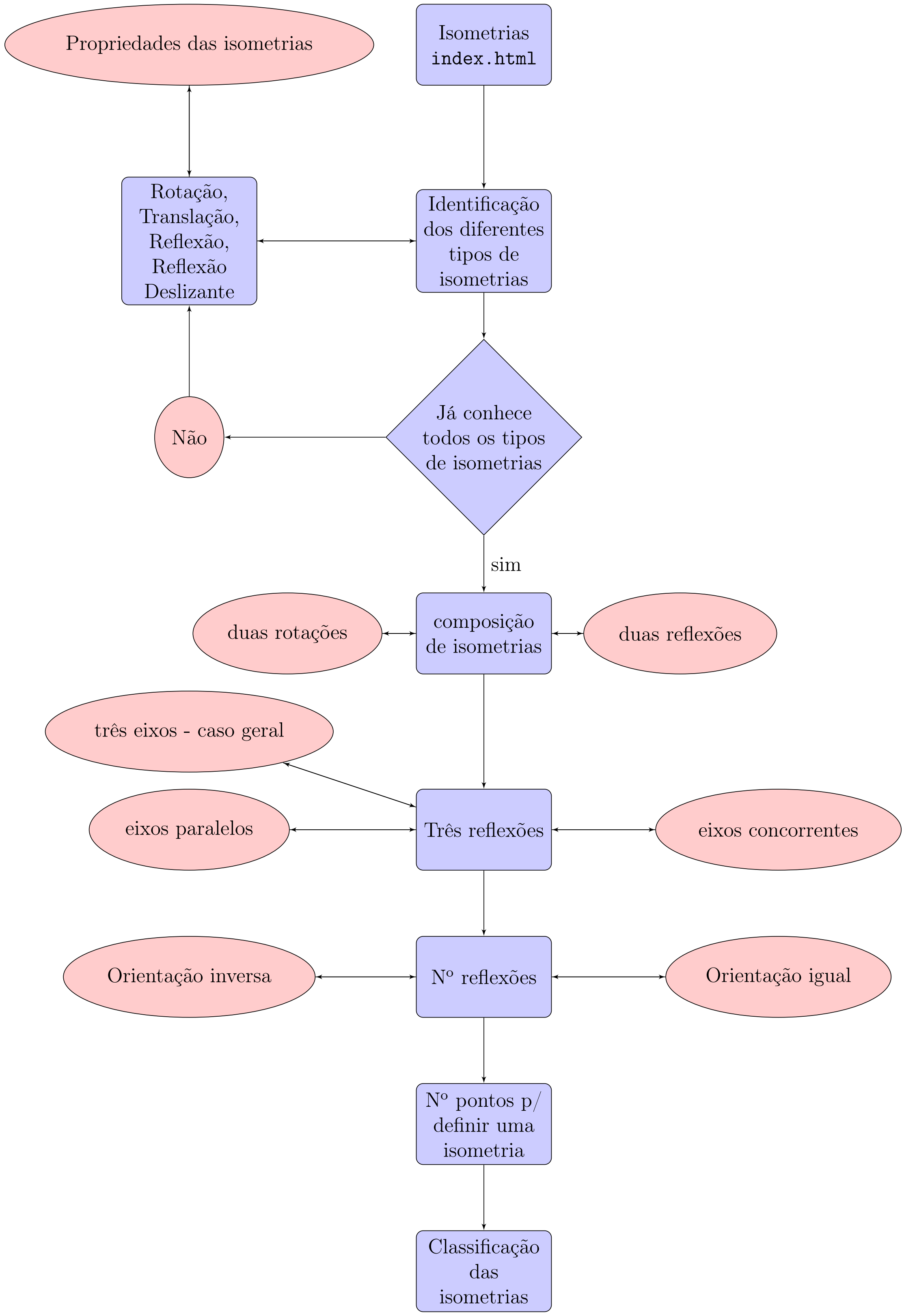


Figura 2.1: Fuxograma do ficheiro HTML

Capítulo 3

Isometrias

Este capítulo foi o resultado de uma cuidadosa e rigorosa investigação, efetuada passo a passo, sobre as transformações geométricas que se designam por isometrias.

Foram consultados quase exclusivamente dois livros: *Curso de Geometria* de Paulo Ventura Araújo, [1], e *Transformações Geométricas* de A. J. Franco de Oliveira, [5]. Paulo Ventura Araújo, é professor do Departamento de Matemática, da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e Franco de Oliveira, atualmente aposentado, é professor emérito da Universidade de Évora.

A abordagem que cada um dos autores faz do tema em análise é distinta, optando o primeiro por uma forma geométrica, mais intuitiva e o segundo por uma explicação algébrica, mais simbólica. Considero que os dois autores se completam, e fui utilizando ora um, ora outro, em cada uma das demonstrações apresentadas.

Abordagem semelhante à efetuada neste estudo, foi encontrada em [9], *Symmetries of Culture — Theory and Pratice of Plane Pattern Analysis*: a demonstração de que só existem quatro tipos de isometrias (translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante) é feita através da prova sequencial de três proposições. A primeira proposição refere que se forem conhecidos três pontos não colineares e as respetivas imagens, a isometria fica completamente determinada. A segunda proposição identifica a reflexão como unidade básica das isometrias, afirmando que qualquer que seja a isometria no plano, esta pode ser obtida pela composição de, no máximo, três reflexões. Por último, a terceira proposição, está subdividida em duas partes: a primeira parte refere que a composição de duas reflexões dá origem a uma translação ou a uma rotação, conforme a posição relativa dos dois eixos de reflexão (eixos paralelos origina uma translação, eixos concorrentes dá origem a uma rotação); a segunda parte afirma que quando se compõem três reflexões, e também dependendo da posição relativa dos eixos de reflexão, obtém-se uma reflexão ou uma reflexão deslizante. Todas estas proposições são abordadas neste capítulo, não necessariamente por esta ordem.

No entanto, outros métodos podem ser utilizados para chegar às mesmas conclusões sobre o tema das isometrias. José Carlos Santos, professor no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, nos seus apontamentos disponibilizados aos alunos de Formação Complementar em Matemática I [11], utiliza os números complexos a par com a Geometria e demonstra como, utilizando os números complexos, se obtém a classificação das isometrias do plano.

Nas demonstrações dos teoremas, corolários e proposições apresentados neste capítulo, optei pela abordagem geométrica, pois além de a considerar mais simples de explicar a alunos do 8º ano do ensino básico, está de acordo com o objetivo principal deste trabalho, enquadrando-se na utilização do *GeoGebra*.

Além disso, considero que a Geometria tem um papel fundamental e insubstituível na formação matemática dos alunos. A aprendizagem da Geometria começa com a observação do que tudo o que se pode observar à nossa volta, de elementos percetíveis e com a identificação de figuras geométricas, primeiro em objetos concretos e depois em crescente abstração.

Todo este processo de aprendizagem, tem como objetivo melhorar a perceção do mundo que nos rodeia, por intermédio da observação, manipulação e transformação, mas também, pela representação dos objetos e das relações entre eles.

Num nível superior, a Geometria como Teoria Axiomática que é, permite o desenvolvimento do raciocínio dedutivo, extremamente importante no desenvolvimento do pensamento matemático.

No caso de alunos mais curiosos e que pretendam ir mais além na sua formação matemática, poderão consultar este capítulo, para confirmar ou esclarecer alguma questão mais pertinente.

Todas as demonstrações têm como suporte uma ou mais imagens em *GeoGebra*, estando os conceitos envolvidos ao nível de serem percebidos por alunos que apreciam a Geometria. Além disso, esta forma de comunicar matematicamente, possibilita um melhor entendimento para eventuais futuros leitores desta tese.

Pretendi esclarecer e explicar, em primeiro lugar a mim própria, e depois, claro, a quem tiver o oportunidade de ler este meu estudo, a razão porque só existem quatro tipos de isometrias o plano. Para alcançar este objetivo, comecei por revelar o que se entende por isometria e depois, por cada um dos tipo de isometria: translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante.

De seguida, a minha investigação levou-me a perceber que a composição de isometrias era fundamental para atingir o que pretendia, e vários exemplos são apresentados neste sentido. Durante esta etapa, tomei consciência que a reflexão é a unidade básica das isometrias, e o culminar desta importante revelação toma a forma do Teorema Fundamental das isometrias.

Por último, é apresentada a classificação das isometrias, que surge como uma consequência direta das várias demonstrações que a antecedem, sendo finalmente apresentado um quadro-resumo, onde se indicam algumas propriedades das isometrias, evidenciando que cada uma das quatro isometrias é única.

Relativamente à parte final deste capítulo, as isometrias e a teoria de de grupos, foi consultado o manual Introdução à Álgebra, de Rui Loja Fernandes e Manuel Ricou (veja-se [3]). A inclusão desta secção foi motivada por se ter considerado favorável a utlização de exemplos com isometrias, para explicar conceitos algébricos. Na opinião destes autores, o ensino da Álgebra torna-se motivador e enriquecido, quando se parte de situações concretas (as isometrias), para conceitos de abstração crescente (o conceito de grupo): *O ensino da Álgebra deve, quanto a nós, refletir este binómio abstrato--concreto* – ([3, prefácio]

3.1 Breve nota histórica

Em todas as consultas e investigações efetuadas sobre os vários tópicos deste trabalho, foram por diversas vezes encontradas referências aos matemáticos que pela primeira vez referiram um determinado termo matemático (que é utilizado por nós hoje em dia), ou mesmo a quem é atribuído um teorema específico. Pelo fascínio que sei que estas referências exercem sobre os alunos, considerei importante incluir esta breve nota histórica.

O Teorema da Classificação das Isometrias, que será o culminar deste capítulo no que diz respeito às isometrias (veja-se teorema 3.6.1 na página 52), é geralmente atribuído a Michel Chasles (1793–1880), historiador e geómetra francês, conhecido pelas suas inúmeras contribuições para a Geometria projetiva.

Originalmente o termo «transformação» foi introduzido pelo matemático Sophus Lie (1842–1899), numa perspetiva geral, basicamente como uma bijeção de um conjunto nele próprio.

O termo «grupo» foi utilizado pela primeira vez pelo jovem matemático Évariste Galois (1811–1832), tendo os seus trabalhos sido reconhecidos somente muitas décadas mais tarde, como peças fundamentais da Matemática moderna.

Outra referência incontornável é o *Programa de Erlangen*, de Felix Klein (1849–1925) (veja-se [6]), considerada como um dos marcos mais importantes da Matemática do século XIX. Mais de um século depois, pode-se afirmar que este estudo constituiu uma espécie de «separação de águas»: surge como o resultado de uma lenta mas brilhante evolução da Geometria projetiva, que Klein resume, condensa e explica, principalmente utilizando o conceito de grupo. A utilização deste conceito, induz novas dinâmicas em vários ramos da Matemática (não se restringindo só à Geometria), estreitando as implicações e ligações conceptuais entre a Álgebra, a Geometria e a Análise, tendência que se mantém na Matemática dos nossos dias.

Klein, é influenciado por vários matemáticos seus contemporâneos, como Sophus Lie, seu amigo e com quem estudou, Arthur Cayley e James Sylvester, a quem foi buscar a teoria geral dos invariantes, e mesmo Bernhard Riemann, com os grupos de homeomorfismos. Mas a originalidade e criatividade de Klein foi ter concebido a relação entre Geometria e grupo, revertendo os papeis destas duas entidades: o grupo passou a ter o papel principal, e os espaços em que ele operava, evidenciavam as diversas caraterísticas da estrutura de um grupo.

Neste programa, Klein apresenta a Geometria como o estudo das propriedades de um espaço invariante pela acção de um grupo. A Geometria euclidiana não era mais do que o estudo do grupo das transformações euclidianas, a Geometria hiperbólica não era mais do que o estudo do grupo das transformações hiperbólicas, desmistificando assim as novas Geometrias.

3.2 Introdução às isometrias

Estritamente falando, uma figura só pode coincidir com ela própria. No entanto, se essa figura se deslocar rigidamente no plano, sem alterar nem a sua forma nem as suas dimensões, então as figuras são *«iguais»*, isto é são congruentes.

O conceito geral de congruência abordado ao longo deste estudo é efetuado utilizando a noção de *isometria no plano*. Etimologicamente, a palavra isometria significa «mesma medida».

Uma transformação geométrica é uma função que faz corresponder a cada ponto do plano, um novo ponto do plano; normalmente exige-se que essa função seja bijetiva (cada ponto do plano é a imagem de um e um só ponto do plano), e que preserve as figuras geométricas: por exemplo a imagem de um triângulo seja ainda um triângulo, e a imagem de uma reta seja uma reta.

As transformações geométricas que irão ser analisadas neste estudo, as *isometrias*, além de estarem de acordo com os requisitos acima mencionados (serem bijetivas e preservarem as figuras geométricas), preservam também outra caraterística, que as descreve: a distância entre dois pontos.

Por definição, uma isometria, ou movimento rígido, é uma função φ aplicada a um conjunto de pontos, que preserva as distâncias, isto é, para quaisquer pontos P e Q, a distância d entre eles obedece à seguinte igualdade:

$$d(P,Q) = d(\varphi P, \varphi Q)$$

As figuras F_1 e F_2 dizem-se isométricas ou congruentes, se e só se existir uma isometria φ que transforme F_1 em F_2, ou seja

$$F_2 = \varphi[F_1]$$

Desta forma, se for aplicada uma transformação geométrica a uma figura F_1 e se a figura resultante F_2 for congruente com F_1, então a transformação geométrica é uma isometria.

3.3 Tipos de isometrias

Nesta secção vão ser abordadas com algum detalhe os diferentes tipos de isometrias do plano. Assim, estas transformações geométricas vão ser definidas e caraterizadas, sendo indicado para cada uma delas, elementos auxiliares necessários quando se pretende referir uma dada isometria.

3.3.1 Translação

A translação é muitas vezes considerada a transformação geométrica mais simples, e é normalmente a primeira isometria a ser apresentada aos alunos.

É definida por um vetor: seja τ a translação associada ao vetor $\overrightarrow{AB}$. Quando τ é aplicada ao ponto C, dá origem a um único ponto C', tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CC'}$ e os segmentos de reta $[AB]$ e $[CC']$ são paralelos (ver figura 3.1).

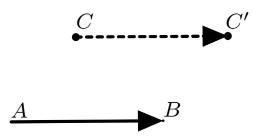


Figura 3.1: Translação

Para se determinar esse ponto, procede-se da seguinte forma: se o ponto C for colinear com os pontos A e B, então o ponto C' também será colinerar, sendo o único ponto pertencente à reta definida pelos pontos A e B, que se encontra à distância de C tal que $\overline{CC'} = \overline{AB}$, e a orientação de C para C' seja a mesma relativamente à de A para B – figura 3.2.

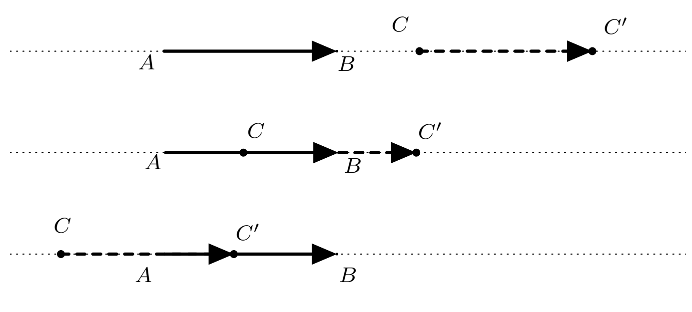


Figura 3.2: Translação — pontos colineares

Se o ponto C for não colinear com os pontos A e B, então os pontos A, B, C e C' formam um paralelogramo, conforme está representado na figura 3.3: da mesma forma, o ponto C' é o único ponto que se encontra à distância de C igual a $\overline{AB}$. O segmento $[CC']$ é paralelo ao vetor $\overrightarrow{AB}$, e o sentido de C para C' é o mesmo do vetor que define a translação.

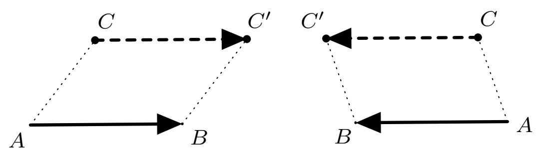


Figura 3.3: Translação — pontos não colineares

Saliente-se que a translação é uma isometria que envia segmentos, retas ou semi-retas, em segmentos, retas ou semi-retas paralelos. É importante também referir que a translação propriamente dita, não tem pontos fixos, e que a orientação dos ângulos é preservada. A translação associada ao vetor nulo, ou identidade, é uma excepção, pois como é óbvio, fixa todos os pontos.

Apesar da translação ser considerada a isometria mais simples, não pode ser classificada como a isometria mais básica.

É interessante referir que a translação pode ser obtida por composição de reflexões, como mais à frente será analisado com algum pormenor. De facto, a translação pode ser obtida pela composição de duas reflexões sucessivas em eixos paralelos, ou ainda pela composição de duas rotações sucessivas, desde que a soma das respectivas amplitudes seja igual a 360°, ou como é óbvio, pela composição de translações.

3.3.2 Rotação

Uma rotação carateriza-se por um centro de rotação O e por uma amplitude α. Assim, se a rotação de centro O e amplitude α for aplicada a um ponto P (ver figura 3.4), sendo $P \neq O$, obtém-se P' tal que $\overline{OP} = \overline{OP'}$, e o ângulo orientado $\angle(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP'}) = \alpha$. O centro da rotação O permanece invariante. Relativamente ao sentido da rotação, considera-se que se $\alpha > 0$, a rotação é feita no sentido positivo ou anti-horário, e se $\alpha < 0$, a rotação é feita no sentido horário.

A rotação propriamente dita, fixa um único ponto, o centro da rotação, e preserva a orientação dos ângulos. A rotação de amplitude 0°, ou identidade, à semelhança da translação associada ao vetor nulo, fixa todos os pontos além do centro de rotação.

Proposição 3.3.1 *Toda a rotação é uma isometria.*

Demonstração: Considere-se a rotação de centro O e amplitude α, abreviando $(O; \alpha)$, de dois pontos A e B:

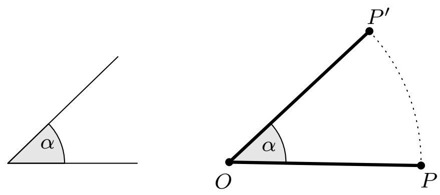


Figura 3.4: Rotação

1. Se os pontos O, A e B forem colineares (ver figura 3.5), podem ocorrer duas situações distintas, conforme a localização dos pontos A e B relativamente ao ponto O. No entanto, é fácil concluir para as duas situações, que $\overline{AB}$=$\overline{A'B'}$: os segmentos de reta $[OA]$ e $[OA']$ são congruentes, pois são raios da mesma circunferência, assim como são congruentes os segmentos de reta $[OB]$ e $[OB']$, pelo mesmo motivo. Na primeira situação $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \overline{A'B'}$. Na segunda situação, estando o ponto O entre os pontos A e B, $\overline{AB} = \overline{OB} + \overline{OA} = \overline{A'B'}$.

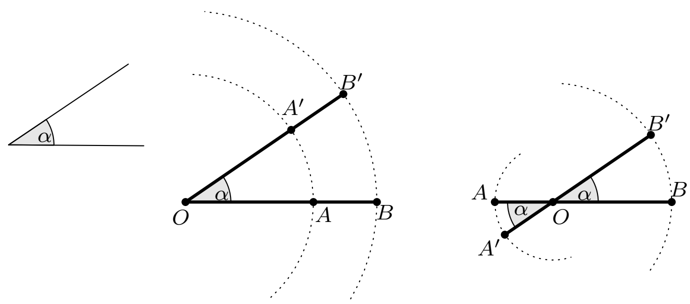


Figura 3.5: Rotação — pontos A e B colineares com o ponto O

2. Se os pontos O, A e B forem não colineares, conforme representado na figura 3.6, aplicando o critério de congruência de triângulos LAL(dois lados iguais e o ângulo entre eles formado igual) aos triângulos $\triangle AOB$ e $\triangle A'OB'$, pode-se concluir que o segmento de reta $[AB]$ é igual ao segmento de reta $[A'B']$.

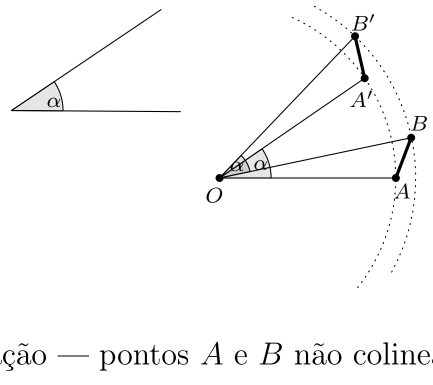


Figura 3.6: Rotação — pontos A e B não colineares com o ponto O

Conclusão: a rotação é uma isometria porque quando aplicada a dois pontos, preserva as distâncias entre eles. ■

Relativamente à rotação, refere-se que esta fixa um e um só ponto, o centro da rotação, e que, tal como a translação, mantém a orientação dos ângulos.

3.3.3 Reflexão

A reflexão é uma transformação geométrica que transforma cada ponto P (de um segmento de reta, de um triângulo, ...), relativamente a um eixo, noutro ponto P', tal que a distância de P ao eixo de reflexão, medida na perpendicular, é igual à distância de P' ao eixo de reflexão também medida na perpendicular, ou seja o eixo de reflexão é a mediatriz do segmento de reta $[PP']$. Os pontos pertencentes ao eixo de reflexão permanecem invariantes.

A reflexão é uma isometria que fixa os pontos que pertencem ao eixo de reflexão e inverte os sentido dos ângulos.

Considere-se a reflexão numa reta l – ver figura 3.7: a reflexão de um ponto P em l é uma função σ_l definida por:

$$\sigma_l(P) = \begin{cases} P & se\ P \in l \\ P' & se\ P \notin l, \quad \text{onde } P' \text{ é o ponto no lado oposto de } l \\ & \qquad\qquad \text{tal que } l \text{ é a mediatriz de } [PP'] \end{cases}$$

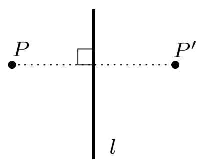


Figura 3.7: Reflexão do ponto P

Proposição 3.3.2 *Toda a reflexão é uma isometria.*

Demonstração: Considere-se a reflexão σ_l de dois pontos quaisquer A e B na reta l, obtendo-se $A' = \sigma_l(A)$ e $B' = \sigma_l(B)$.

Dada a definição de isometria já indicada anteriormente, σ_l é uma isometria se e só $d(A, B) = d(A', B')$.

Conforme a localização dos pontos A e B, vão ser analisados os seguintes quatro casos:

Caso 1: Ambos os pontos A, $B \in l$. Então $A = A'$ e $B = B'$ e de imediato se pode concluir que $d(A, B) = d(A', B')$.

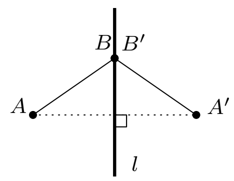


Figura 3.8: Reflexão do segmento de reta $[AB]$

Caso 2: Um e um só dos pontos A e $B \in l$, por exemplo $B \in l$ – conforme figura 3.8. Como l é a mediatriz do segmento de reta $[AA']$ então B (que é igual a B') está a igual distância de A e de A', logo $d(A, B) = d(A', B')$.

Caso 3: O segmento de reta $[AB]$ é perpendicular à reta l e interseta-a no ponto X (ver figura 3.9).

Considere-se o ponto X a origem de um referencial, ou seja a abcissa de X é 0. Considerando a a abcissa de A, e b a abcissa de B, então $d(A, B) = |b - a|$. Pela definição de reflexão e pelas propriedades da mediatriz, as abcissas de A' e de B' são respetivamente $-a$ e $-b$, sendo a distância $d(A', B') = |(-a) - (-b)| = |b - a|$, que era o resultado pretendido.

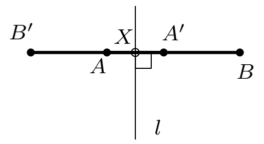


Figura 3.9: Reflexão do segmento de reta $[AB]$ perpendicular à reta l

Caso 4: Os pontos A, $B \notin l$ e o segmento de reta $[AB]$ não é perpendicular à reta l – figura 3.10.

Este caso ainda poderia ser subdividido em dois, conforme os pontos A e B estejam do mesmo lado ou em lados opostos, no entanto a justificação é a mesma.

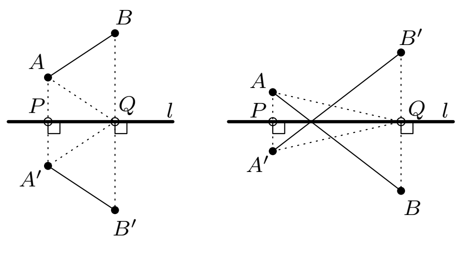


Figura 3.10: Reflexão do segmento de reta $[AB]$ na reta l

Sendo P e Q as interseções com l dos segmentos de reta $[AA']$ e $[BB']$, respetivamente, e como $P \neq Q$ por o segmento de reta $[AB]$ não ser perpendicular à reta l, resulta que os triângulos $\triangle APQ$ e $\triangle A'PQ$ são congruentes. Então $\overline{AQ} = \overline{A'Q}$ e $\angle AQP = \angle A'QP$. Por semelhança de triângulos (critério LAL), $\overline{BQ} = \overline{B'Q}$, $AQ = A'Q$, e $\angle AQB = \angle A'QB'$, conclui-se que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. ∎

A reflexão é uma isometria que deixa invariante o eixo de reflexão e consequentemente todos os pontos que pertençam a esse eixo, conforme já referido, e que inverte a orientação dos ângulos.

3.3.4 Reflexão Deslizante

A reflexão deslizante é a isometria que se obtém por composição de uma reflexão numa dada reta, seguida por uma translação segundo um vetor paralelo à reta, ou vice-versa, isto é a composição de uma translação seguida de uma reflexão, tendo a reta e o vetor a mesma direção – ver figura 3.11. De facto, no caso da reflexão deslizante, o resultado é o mesmo independentemente da ordem pela qual as duas isometrias são feitas.

Uma reflexão deslizante fica assim definida por uma reta e por um vetor; este quarto e último tipo de isometria, tal como a translação, não tem pontos fixos, mas ao contrário desta, inverte a orientação dos ângulos.

A demonstração de que a composição de uma reflexão com uma translação é uma isometria, será dada na secção onde é analisada a composição de isometrias – ver proposição 3.4.1, onde é demonstrado que o resultado da composição de isometrias é uma isometria. Assim, como a reflexão deslizante resulta da composição de uma translação com uma reflexão, ou seja, resulta da composição de duas isometrias, então é uma isometria.

É importante referir que a reflexão deslizante, pode ser obtida pela composta de três reflexões, em três retas distintas, nem paralelas nem concorrentes – Teorema 3.4.6, na página 44.

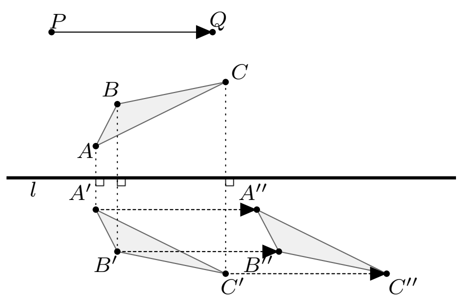


Figura 3.11: Reflexão deslizante

3.4 Composição de isometrias

Estando devidamente caraterizadas as quatro isometrias do plano, interessa agora provar que quando se compõem duas ou mais isometrias, o resultado é ainda uma isometria. Assim, depois de provada esta questão, vão ser analisadas diversas composições de isometrias, com resultados considerados interessantes. Um dos resultados interessantas desta análise, é sem dúvida o papel fundamental que a reflexão desempenha, pois qualquer das outras três isometrias do plano (translação, rotação e reflexão deslizante), pode ser obtida através da composição de reflexões.

A reflexão pode ser considerada a unidade básica das isometrias, pois as outras podem ser «construídas» por reflexões.

Proposição 3.4.1 *O resultado obtido quando se compõem isometrias, é uma isometria.*

Demonstração: Sejam f a composição de duas isometrias $\varphi_1 \circ \varphi_2$, aplicadas a dois pontos A e B: $f(A) = \varphi_2 \circ \varphi_1(A)$ e $f(B) = \varphi_2 \circ \varphi_1(B)$.

Considerando os pontos A e B, e as imagens destes dois pontos, $\varphi_1(A)$, $\varphi_1(B)$, $\varphi_2 \circ \varphi_1(A)$ e $\varphi_2 \circ \varphi_1(B)$ então a distância d entre eles obedece à seguinte igualdade:

$$d(\varphi_2 \circ \varphi_1(A), \varphi_2 \circ \varphi_1(B)) = d(\varphi_1(A), \varphi_1(B)) = d(A, B)$$

A função composta $\varphi_2 \circ \varphi_1$ é uma isometria pois preserva as distâncias entre dois pontos, de acordo com a definição de isometria dada anteriormente.

Este resultado pode ser generalizado para a composição de n isometrias: φ_1, φ_2, φ_3, $\ldots$, φ_{n-1}, φ_n. Assim,

$$d(\varphi_n \circ \varphi_{n-1} \circ \cdots \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(A), \varphi_n \circ \varphi_{n-1} \circ \cdots \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(B)) = d(A, B)$$

Fica assim provado que o resultado da composição de isometrias, é também uma isometria. ∎

3.4.1 Composição de translações

Teorema 3.4.1 *A composição de translações é uma translação (ou a identidade).*

Demonstração: Conforme já foi referido, uma translação é caraterizada por um vetor, que a define. Assim, quando se compõem duas translações, é necessário conhecer o vetor associado a cada uma delas.

A isometria composta será uma translação associada ao vetor-soma, resultado da adição dos dois vetores.

Seja τ_1 a translação associada ao vetor $\overrightarrow{v_1}$ e τ_2 a translação associada ao vetor $\overrightarrow{v_2}$.

A isometria $f = \tau_2 \circ \tau_1$ é uma translação, associada ao vetor-soma $\overrightarrow{v_1 + v_2}$, ver figura 3.12.

No caso dos vetores serem simétricos (mesma direção, sentidos opostos e igual comprimento), o vetor-soma é o vetor nulo: $\overrightarrow{v_1} = -\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = 0$.

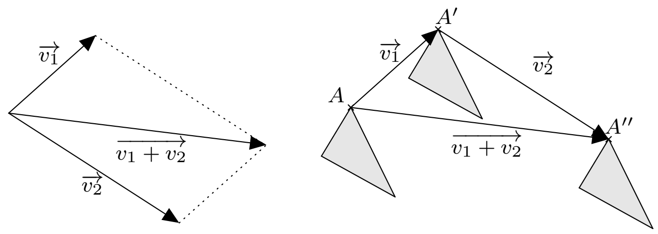


Figura 3.12: Composição de translações — vetores com diferentes direções

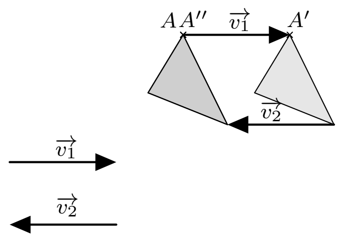


Figura 3.13: Composição de translações — vetores simétricos

Neste caso, a isometria resultante é a identidade, conforme se pode observar na figura 3.13.

Conclusão: Quando se compõem translações, a isometria resultante é uma translação, sendo a identidade no caso em que os vetores são simétricos (translação associada ao vetor nulo). ∎

3.4.2 Composição de duas reflexões em eixos concorrentes

Teorema 3.4.2 *Seja f a isometria composta por duas reflexões sucessivas f_1 e f_2, em retas concorrentes: $f = f_2 \circ f_1$. A isometria resultante, f, é uma rotação, com centro no ponto de interseção das duas retas e de amplitude igual ao dobro do ângulo que as duas retas fazem entre si.*

Demonstração: Seja O o ponto de interseção dos dois eixos. Como $f_1(O) = f_2(O) = O$, é claro que $f(O) = O$.

Seja A' a imagem do ponto A por reflexão no eixo$_1$ e A'' a imagem do ponto A' por reflexão no eixo$_2$. Seja o ponto P a interseção do eixo$_1$ com o segmento de reta $[AA']$ e P' a interseção do eixo$_2$ com o segmento de reta $[A'A'']$ – ver figura 3.14.

Por definição, os segmentos de reta $[AP]$ e $[A'P]$ são congruentes, assim como são iguais as amplitudes dos ângulos $\angle AOP$ e $\angle A'OP$, iguais a θ, pois os triângulos $\triangle AOP$ e $\triangle A'OP$ são congruentes. Da mesma forma, os segmentos de reta $[A'P']$ e $[A''P']$ são

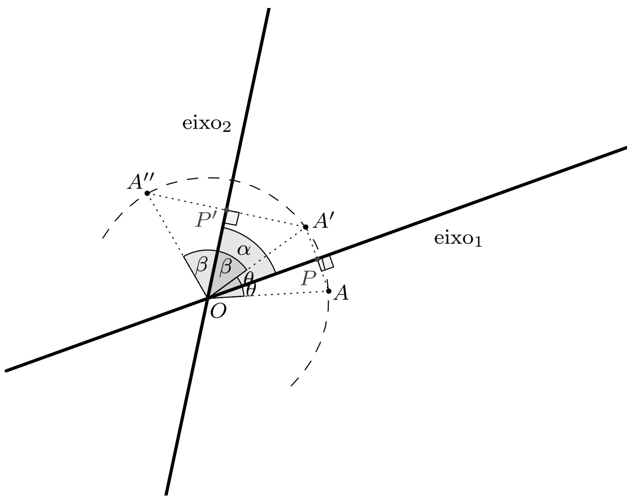


Figura 3.14: Composição de reflexões em eixos concorrentes

congruentes, assim como são iguais as amplitudes dos ângulos $\angle A'OP'$ e $\angle A''OP'$, iguais a β, devido aos triângulos $\triangle A'OP'$ e $\triangle A''OP'$ serem congruentes.

Deste modo, para determinar a amplitude da rotação, ângulo $\angle AOA''$, pode-se utilizar a seguinte expressão:

$$\angle AOA'' = \angle AOP + \angle A'OP + \angle A'OP' + \angle A''OP'$$

ou utilizando as letra gregas α, β e θ

$$\angle AOA'' = \theta + \theta + \beta + \beta$$

Mas, como o ângulo que os dois eixos fazem entre si, é igual a

$$\angle POP' = \angle A'OP + \angle A'OP' = \theta + \beta$$

e como

$$\angle AOP = \angle A'OP \; e \; \angle A'OP' + \angle A''OP'$$

então

$$\angle AOA'' = 2\alpha.$$

Conclusão: a rotação está centrada no ponto de interseção dos dois eixos e a sua amplitude é igual ao dobro do ângulo que os dois eixos fazem entre si. ■

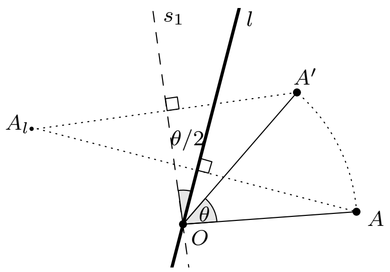


Figura 3.15: Rotações — diferentes formas de representação: $\rho = \sigma_{s_1} \circ \sigma_l$

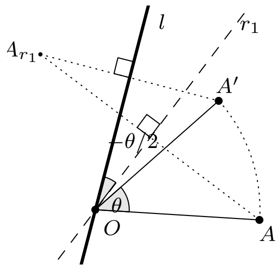


Figura 3.16: Rotações — diferentes formas de representação: $\rho = \sigma_l \circ \sigma_{r_1}$

Corolário 3.4.1 *Seja ρ uma rotação centrada em O, sendo θ o ângulo de rotação, e seja l uma reta qualquer que passe no ponto O. Então existem e são únicas as retas r_1 e s_1, tais que $\rho = \sigma_l \circ \sigma_{r_1} = \sigma_{s_1} \circ \sigma_l$.*

Demonstração: Seja ρ uma rotação de centro no ponto O e amplitude θ, que envia o ponto A, no ponto A'. Seja l uma reta qualquer, que passa no ponto O. De acordo com o teorema 3.4.2, e sendo a rotação a composta de duas reflexões em eixos concorrentes, com centro no ponto de interseção e amplitude igual ao dobro do ângulo existente entre as duas retas, então as retas r_1 e s_1 são as únicas retas que fazem um ângulo de $+\theta/2$ e $-\theta/2$ com a reta l – vejam-se as figuras 3.15 e 3.16. ∎

3.4.3 Composição de duas reflexões em eixos paralelos

Teorema 3.4.3 *Seja f a isometria composta por duas reflexões sucessivas f_1 e f_2, em retas paralelas: $f = f_2 \circ f_1$. A isometria resultante, f, é a translação, por um vetor perpendicular às retas, e de comprimento igual ao dobro da distância entre estas.*

Demonstração: Seja A um ponto do plano e sejam eixo$_1$ e eixo$_2$ os eixos das duas reflexões. A demonstração vai ser feita supondo que:

1. O ponto A está num dos semi-planos em que o eixo$_1$ divide o plano e o eixo$_2$ está noutro;

2. A distância de A ao eixo$_1$ é menor ou igual à distância d entre os dois eixos.

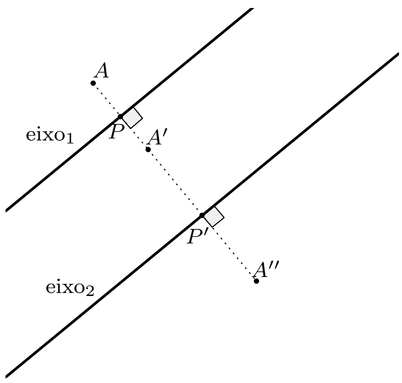


Figura 3.17: Composição de duas reflexões em eixos paralelos

Os restantes casos são análogos.

Seja A' a imagem do ponto A por reflexão no eixo$_1$ e A'' a imagem do ponto A' por reflexão no eixo$_2$. Seja o ponto P a interseção do eixo$_1$ com o segmento de reta $[AA']$ e P' a interseção do eixo$_2$ com o segmento de reta $[A'A'']$ – ver figura 3.17.

Por definição de reflexão, os segmentos de reta $[AP]$ e $[A'P]$ são congruentes, assim como os segmentos de reta $[A'P']$ e $[A''P']$. Neste caso, cada reta perpendicular aos eixos de reflexão, fica invariante por f, isto é os pontos da reta são enviados por f em pontos da mesma reta. Embora cada uma das isometrias, f_1 e f_2, tenham um número infinito de pontos fixos, a isometria f não tem pontos fixos: assim, f deverá ser uma translação.

O comprimento do segmento de reta $[AA'']$ é igual a:

$$\overline{AA''} = \overline{AP} + \overline{PA'} + \overline{A'P'} + \overline{P'A''}$$

Mas como $\overline{AP} = \overline{PA'}$ e $\overline{A'P'} = \overline{P'A''}$ e a distância entre os dois eixos d, é dada pela expressão $d = \overline{AP} + \overline{A'P'}$, então $\overline{AA''} = 2d$. Visto que o segmento AA' é perpendicular ao eixo$_1$ e que o segmento $A'A''$ é perpendicular ao eixo$_2$, o segmento AA'' é perpendicular a ambos os eixos. Além disso, o sentido do vetor AA'' é tal que se um ponto percorrer, nesse sentido, a reta que o contém, então esse ponto passa primeiro pelo eixo$_1$ e só depois pelo eixo$_2$.

Conclusão: A isometria f é uma translação, com direção perpendicular aos dois eixos e de comprimento igual ao dobro da distância entre eles, e cujo sentido vai do eixo$_1$ para o eixo$_2$. ■

3.4.4 Composição de três reflexões em eixos paralelos

Teorema 3.4.4 *Seja f a isometria composta por três reflexões em eixos paralelos r, s e t: $f = \sigma_t \circ \sigma_s \circ \sigma_r$. Então a isometria resultante f é uma reflexão num eixo paralelo aos outros três, sendo esse eixo u, único.*

Demonstração: Sejam r, s e t três retas paralelas, e considere-se a reflexão do triângulo $\triangle ABC$ nessas três retas – ver figura 3.18.

Por definição de reflexão, e como pelo teorema, as retas r, s e t são paralelas entre si, os pontos A, A', A'' e A''' são colineares, o mesmo se verificando para os outros vértices dos triângulos.

Então a reta u será a mediatriz dos segmentos $[AA''']$, $[BB''']$ e $[CC''']$, sendo esta reta única, obtendo-se $f = \sigma_u$.

Desta forma, f é uma reflexão cujo eixo será a reta que passa pelos pontos médios dos segmentos $[AA''']$, $[BB''']$ e $[CC''']$.

Note-se, que a isometria f também pode ser identificada como a composta de uma translação com uma reflexão, de acordo com o teorema 3.4.3. Assim $f = \sigma_t \circ \tau$, sendo τ a translação associada ao vetor com direção perpendicular às retas, e com comprimento igual ao dobro da distância entre as retas s e r, de acordo com o teorema 3.4.3. Neste caso, a composta de uma reflexão com uma translação não dá origem a uma reflexão deslizante mas sim a uma reflexão, pois o vetor é perpendicular ao eixo de reflexão,.

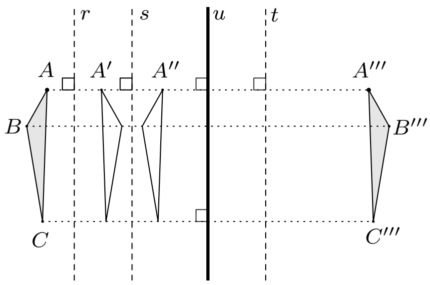


Figura 3.18: Composição de três reflexões em eixos paralelos

Desta demonstração, e também da demonstração da composta de duas reflexões em eixos paralelos, pode-se concluir que quando se efetuam reflexões em eixos paralelos se o número de reflexões for par, a isometria obtida é uma translação, se o número for ímpar, é uma reflexão. ■

Corolário 3.4.2 *Seja τ a translação de um ponto A ao longo de uma reta l, dando origem a um ponto A''. Então, para qualquer reta r_1 perpendicular a l, existe e é única, a reta s_1, perpendicular a l tal que $\tau = \sigma_{s_1} \circ \sigma_{r_1}$.*

Demonstração: A isometria τ é a translação ao longo da reta l e associada ao vetor $\overrightarrow{AA''}$, podendo também ser definida pela composição de reflexões $\sigma_r \circ \sigma_s$. A reta r_1 é qualquer reta perpendicular a l – ver figura 3.19. A obtenção da reta s_1, que é única, pode ser feita da seguinte forma: depois da reflexão de A na reta r_1, obtendo-se o ponto A_{r_1}, a reta s_1 será a mediatriz do segmento de reta $[A_{r_1}A'']$.

Conclusão: a translação τ pode ser obtida pela composição das seguintes reflexões: $\tau = \sigma_r \circ \sigma_s = \sigma_{s_1} \circ \sigma_{r_1} = \cdots = \sigma_{r_n} \circ \sigma_{s_n}$, isto é, a translação τ pode ser definida por inúmeras formas diferentes. ■

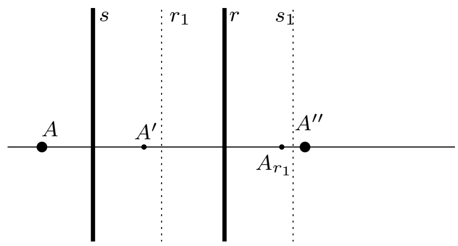


Figura 3.19: Composição de reflexões — diferentes formas de representação

3.4.5 Composição de três reflexões em eixos concorrentes

Teorema 3.4.5 *Sejam r, s e t três retas concorrentes num ponto P. Então, existe uma única reta l, que passa no ponto P, tal que a isometria obtida por composição da reflexão sucessiva em cada uma das três retas, é uma reflexão nessa reta:*

$$\sigma_t \circ \sigma_s \circ \sigma_r = \sigma_l.$$

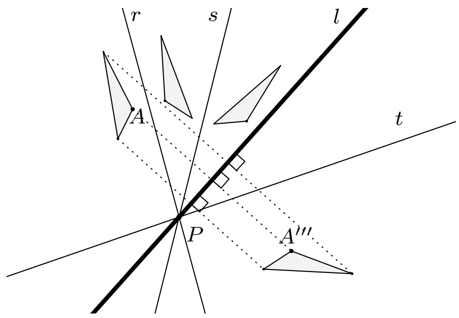


Figura 3.20: Composição de reflexões em três retas concorrentes

Demonstração: De acordo com o demonstrado anteriormente no Teorema 3.4.2, $\sigma_s \circ \sigma_r$, é uma rotação, centrada no ponto P e de amplitude igual ao dobro do ângulo que as duas retas fazem entre si.

Pelo corolário 3.4.1, existe uma reflexão numa reta l que passa por P, tal que $\sigma_s \circ \sigma_r = \sigma_t \circ \sigma_l$. Substituindo esta expressão na igualdade do teorema, fica:

$$\sigma_t \circ \sigma_s \circ \sigma_r = \sigma_t \circ \sigma_t \circ \sigma_l$$

Como $\sigma_t \circ \sigma_t$ é a identidade (duas reflexões sucessivas na mesma reta), é imediato que

$$\sigma_t \circ \sigma_s \circ \sigma_r = \sigma_l$$

Pela definição de reflexão, a reta l é a mediatriz de dois pontos correspondentes, por exemplo A e A'''.

Conclusão: a composição de reflexões em três retas concorrentes no mesmo ponto, é uma reflexão numa outra reta, também concorrente nesse ponto. ■

3.4.6 Composição de três reflexões em eixos nem paralelos nem concorrentes

Teorema 3.4.6 *Sejam r, s e t retas distintas que não são paralelas nem concorrentes. Então a isometria f, obtida por composição da reflexão sucessiva em cada uma das três retas,* $f = \sigma_r \circ \sigma_s \circ \sigma_t$*, é uma reflexão deslizante.*

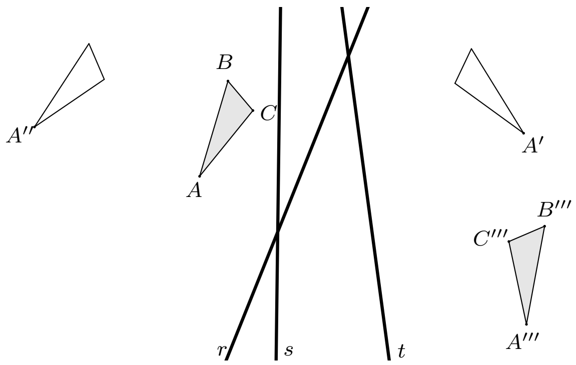


Figura 3.21: Reflexão em três retas nem paralelas nem concorrentes

Demonstração: Considere-se que as retas r e s se intersetam, por exemplo, no ponto P. Pela hipótese do teorema $P \notin t$. Seja l a reta perpendicular a t passando por P, e Q o ponto de interseção de l e t – ver figura 3.22.

Pelo corolário das rotações, corolário 3.4.1, existe uma única reta u que passa por P, tal que $\sigma_r \circ \sigma_s = \sigma_u \circ \sigma_l$ e $\sigma_r \circ \sigma_s \circ \sigma_t = \sigma_u \circ \sigma_l \circ \sigma_t$.

Seja agora v a reta perpendicular a u que passa por Q e m a reta perpendicular a v que passa por Q – ver figura 3.23. Como $\sigma_l \circ \sigma_t = \sigma_m \circ \sigma_v$ é uma rotação de 180°, então $\sigma_r \circ \sigma_s \circ \sigma_t = \sigma_u \circ \sigma_m \circ \sigma_v$. Dado que as retas u e m são retas paralelas, $\sigma_u \circ \sigma_m$ é uma translação ao longo de v, isto é $\tau = \sigma_u \circ \sigma_m$.

Então $\sigma_r \circ \sigma_s \circ \sigma_t = \sigma_u \circ \sigma_m \circ \sigma_v = \tau \circ \sigma_v$, que é por definição, uma reflexão deslizante.■

3.4.7 Composição de duas rotações

Antes de efetuar a demonstração da composição de duas rotações, é importante referir que as únicas isometrias que enviam segmentos/semi-retas/retas em segmentos/semi-retas/retas paralelos, são a translação e a rotação de amplitude 180°, conforme demonstração efetuada a seguir.

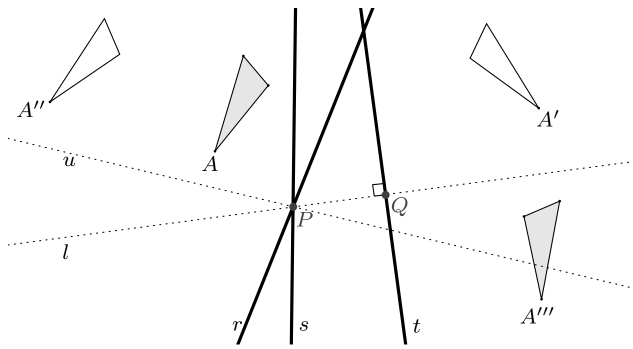


Figura 3.22: Reflexões em três retas nem paralelas nem concorrentes: retas u e l

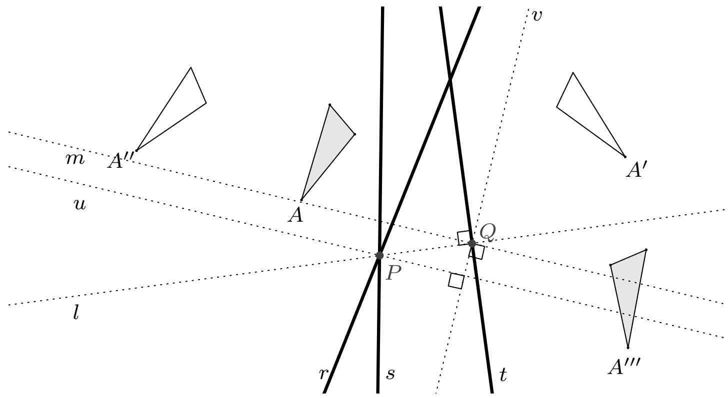


Figura 3.23: Três reflexões: retas m e v

Proposição 3.4.2 *Se os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ forem congruentes, e os lados do primeiro triângulo forem paralelos aos lados correspondentes do segundo triângulo, então a isometria que transforma o triângulo $\triangle ABC$ no triângulo $\triangle A'B'C'$, é uma translação (se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$) ou uma rotação de amplitude $180°$ (se $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'B'}$).*

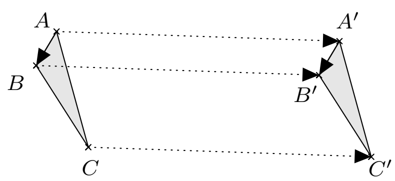


Figura 3.24: Lados correspondentes paralelos — translação

Demonstração: No caso dos lados correspondentes dos dois triângulos, serem colineares, então os dois triângulos são coincidentes: se os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ coincidirem, e também coincidirem os segmentos de reta $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$, então $A = \overline{AB} \cap \overline{AC} = \overline{A'B'} \cap \overline{A'C'} = A'$. Neste caso, a isometria é a translação associada ao vetor nulo, ou seja, é a identidade.

No caso dos dois triângulos não coincidirem, supondo que os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são não colineares, e pela hipótese da proposição, estes dois segmentos são congruentes e paralelos, então os pontos A, B, A' e B', são os vértices de um paralelogramo. Conforme a posição relativa dos vértices A e A', a isometria será uma translação ou uma rotação.

Caso 1 – A e A' são vértices consecutivos do paralelogramo: neste caso, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ (e $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$) e C' será o ponto obtido por translação associada ao vetor $\overrightarrow{AA'}$, aplicada ao ponto C – ver figura 3.24.

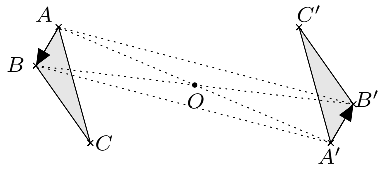


Figura 3.25: Lados correspondentes paralelos — rotação

Caso 2 – A e A' são vértices opostos do paralelogramo: neste caso, os segmentos de reta $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$, são as diagonais do paralelogramo (e $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'B'}$), intersetando-se em O, que é o ponto médio dos dois segmentos (e também do segmento $\overline{CC'}$). Assim, o ponto O, é o centro da rotação, de amplitude 180° (repare-se que qualquer dos pontos, respetiva imagem e o centro de rotação pertencem à mesma reta) — ver figura 3.25.■

Proposição 3.4.3 *Seja φ uma isometria no plano. Se, para quaisquer dois pontos A, B, e respetivas imagens $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$, sendo $A \neq A'$ e/ou $B \neq B'$ o ângulo orientado $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ tiver uma amplitude α, então essa isometria φ é uma rotação de amplitude α, ou uma translação, se o ângulo α for igual a 0°.*

Demonstração: Suponha-se $\alpha \neq 0°$ (pois o caso de α ser igual a 0° já foi analisado na proposição anterior 3.4.2). Esta demonstração irá provar que a isometria φ é uma rotação de centro O e amplitude α, investigando se tem pontos fixos, e posteriormente verificando se $\varphi = (O; \alpha)$.

Pela proposição, a isometria em causa não é a identidade. Assim, existe um ponto A tal que $A \neq A'$.

Considere-se um ponto P a percorrer a mediatriz de AA' (ver figura 3.26): a amplitude do ângulo $\angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PA'})$ pertence ao intervalo $]0, 360°[$, existindo um único ponto O tal que $\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \alpha$.

Por definição de isometria $\overline{A'O'} = \overline{AO}$ e $\overline{AO} = \overline{A'O}$, porque O pertence à mediatriz de $\overline{AA'}$, logo $\overline{A'O'} = \overline{A'O}$.

Como $\angle(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{A'O}) = \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \alpha = \angle(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{A'O'})$, então $\overrightarrow{A'O} = \overrightarrow{A'O'}$, que é igual a $O = O'$. Está assim provado que O é um ponto fixo.

Seja agora B um ponto qualquer, com $B \neq O$ – ver figura 3.27. Pela hipótese, os segmentos $\overline{O'B'}$ e $\overline{OB}$ são congruentes e $\angle(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O'B'}) = \alpha$.

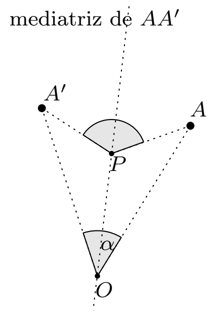


Figura 3.26: Rotação de amplitude α – I

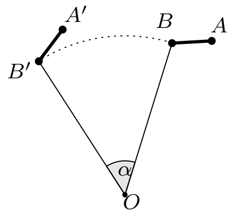


Figura 3.27: Rotação de amplitude α – II

Como já foi provado que $O' = O$, então $\overline{OB'} = \overline{OB}$ e $\angle(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) = \alpha$, o que prova que B' é a imagem de B por φ, ou seja, $B' = \varphi(B)$, sendo φ uma rotação de centro O e amplitude α. ∎

Teorema 3.4.7 *Quando se compõem duas rotações (O_1, α) e (O_2, β), o resultado obtido depende da soma $\alpha + \beta$ das amplitudes. Mais precisamente;*

— *se $\alpha+\beta$ for igual a $0°$ ou a $360°$, então a isometria que se obtém pela composição é uma translação (que pode ser a identidade);*

— *caso contrário, é uma rotação de amplitude igual a $\alpha + \beta$.*

Demonstração: No caso em que $\alpha + \beta = 360°$, a isometria composta é uma translação, associada ao vetor $\overrightarrow{AA'}$ – ver figura 3.28.

Se O_1 coincidir com O_2, sendo $\alpha + \beta = 360°$, então as duas rotações são a inversa uma da outra, e a isometria composta é a identidade – ver figura 3.29 .

Se $\alpha + \beta \neq 360°$, a isometria composta é uma rotação de amplitude $\alpha + \beta$, pois cada segmento $\overline{AB}$ é enviado num segmento congruente $\overline{A''B''}$, tal que o ângulo orientado $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A''B''}) = \alpha + \beta$ – ver figura 3.30.

A localização do centro de rotação da isometria composta é obtida pela interseção das mediatrizes $\overline{AA''}$ e $\overline{BB''}$.

No caso de $O_1 = O_2$, como é óbvio o centro de rotação da isometria composta também coincide com estes dois pontos. ∎

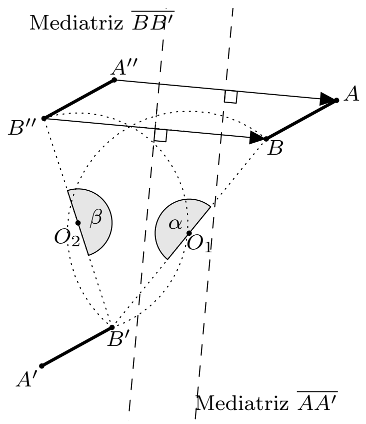


Figura 3.28: Composição de rotações com $\alpha + \beta = 360°$

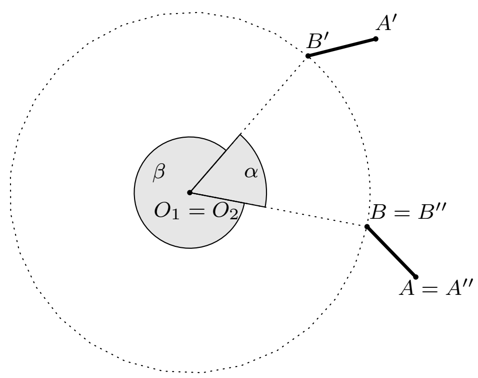


Figura 3.29: Composição de rotações com $\alpha + \beta = 360°$ e $O_1 = O_2$

Teorema 3.4.8 *A composta por qualquer ordem de uma rotação de amplitude α com uma translação associada ao vetor $\overrightarrow{u}$, é uma rotação com amplitude α.*

Demonstração: Este teorema é uma consequência imediata da proposição 3.4.3: para cada par de pontos, por exemplo A e B, o ângulo orientado $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A''B''})$ é igual a α.

Na figura 3.31 estão representadas as duas isometrias: a translação associada ao vetor $\overrightarrow{u}$ e a rotação de amplitude α.

É interessante referir que neste caso, composição de translação com rotação, interessa a ordem pela qual as isometrias são efetuadas, pois apesar a isometria composta ser nos dois casos, uma rotação com a mesma amplitude, o resultado final não é o mesmo – veja-se figura 3.32.

Em qualquer dos casos, a localização do centro de rotação da isometria composta – O_c, é feita por interseção das mediatrizes dos segmentos de reta $[AA'']$, $[BB'']$ e $[CC'']$,

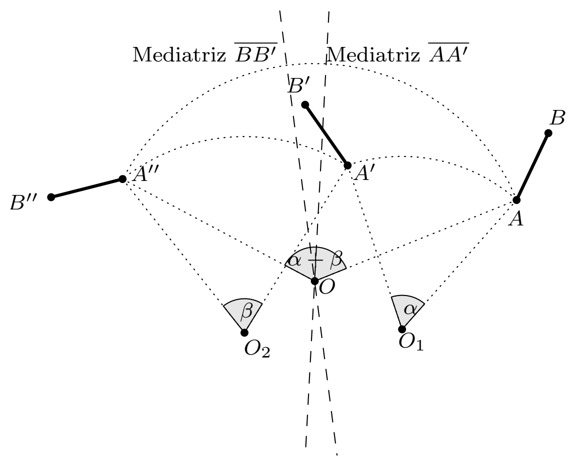


Figura 3.30: Composição de rotações com $\alpha + \beta \neq 360°$

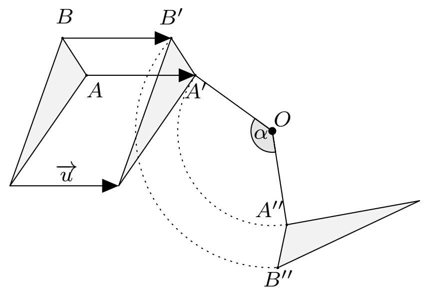


Figura 3.31: Composição de translação com rotação

obtendo-se o novo centro de rotação O_c – figura 3.33. ■

3.5 Teorema Fundamental das isometrias

Teorema 3.5.1 *Se $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, então existe uma e uma só isometria σ, tal que $\sigma A = D$, $\sigma B = E$ e $\sigma C = F$.*

Demonstração: Vai-se obter σ como a composta de três isometrias, σ_1, σ_2 e σ_3 (isto é, $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$), cada uma das quais é uma reflexão ou a identidade.

1. Se $A = D$, a isometria σ_1 é a identidade.
   Se $A \neq D$, σ_1 será a reflexão na mediatriz l_1 de $\overline{AD}$. Após a reflexão σ_1, as imagens dos vértices do triângulo $\triangle ABC$ são:

   — $\sigma_1 A = D$

   — $\sigma_1 B = B_1$

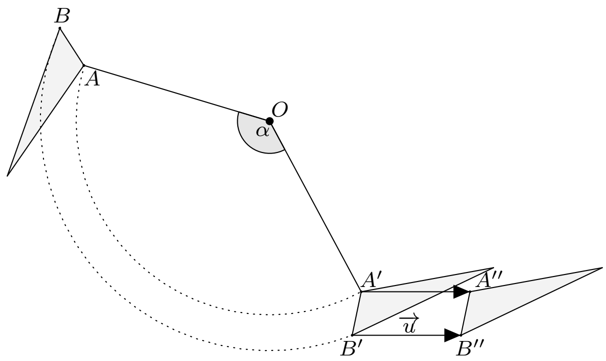


Figura 3.32: Composição de rotação com translação: ordem das isometrias

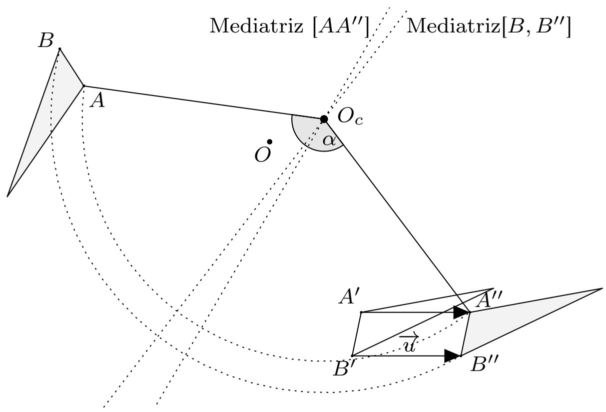


Figura 3.33: Composição de rotação com translação: localização do centro da isometria composta

— $\sigma_1 C = C_1$

2. Se $E = B_1$, a isometria σ_2 é a identidade.

   Se $E \neq B_1$, σ_2 será a reflexão na mediatriz l_2 de $\overline{B_1E}$, pois D está na mediatriz l_2 de $\overline{B_1E}$, dado os triângulos serem congruentes pela hipótese do teorema e σ_1 ser uma isometria.

   Após a reflexão σ_2, as imagens dos vértices do triângulo $\triangle DB_1C_1$ são:

   — $\sigma_2 D = D$

   — $\sigma_2 B_1 = E$

   — $\sigma_2 C_1 = C_2$

3. Se $C_2 = F$, a isometria σ_3 é a identidade.
   Se $C_2 \neq F$, σ_3 será a reflexão na mediatriz l_3 de $\overline{C_2F}$, pois D e E estão na mediatriz l_3 de $\overline{C_2F}$, dado os triângulos serem congruentes pela hipótese do teorema e σ_1 e σ_2 serem isometrias.

   Após a reflexão σ_3, as imagens dos vértices do triângulo $\triangle DEC_2$ são:

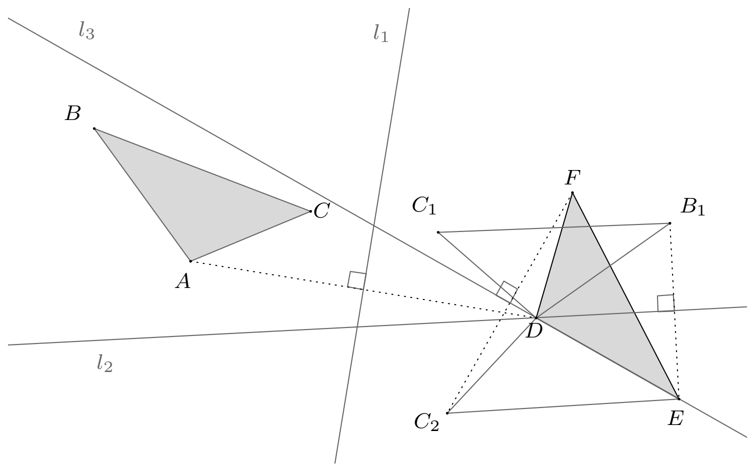


Figura 3.34: Teorema fundamental das isometrias — existência

— $\sigma_3 D = D$

— $\sigma_3 E = E$

— $\sigma_3 C_2 = F$

Voltando à consideração inicial que $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$, e utilizando as igualdades obtidas nos pontos 1, 2 e 3, obtém-se:

— $\sigma A = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 A = \sigma_3 \circ \sigma_2 D = \sigma_3 D = D$

— $\sigma B = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 B = \sigma_3 \circ \sigma_2 B_1 = \sigma_3 E = E$

— $\sigma C = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 C = \sigma_3 \circ \sigma_2 C_1 = \sigma_3 C_2 = F$

Repare-se que não só existe uma isometria, como é composta por três reflexões, no máximo.

Está assim provada a existência da isometria σ, que transforma $\triangle ABC$ em $\triangle DEF$. Falta agora provar que σ é única.

Uma isometria fica completamente determinada por três pontos não colineares e as suas imagens. De facto, dado que as isometrias preservam distâncias, a distância de qualquer ponto P (ver figura 3.35) a A deverá ser igual à distância da sua imagem $P'(= \sigma(P))$ a D. Analogamente a distância de P a B deverá ser igual à de P' a E e a distância de P a C deverá ser igual à de P' a F.

Assim, pela interseção das seguintes circunferências

— circunferência centrada em D, com raio igual à distância de P a A

— circunferência centrada em E, com raio igual à distância de P a B

— circunferência centrada em F, com raio igual à distância de P a C

obtém-se um único ponto: P'.

Está assim provado que a isometria σ, que transforma $\triangle ABC$ em $\triangle DEF$ é única. ■

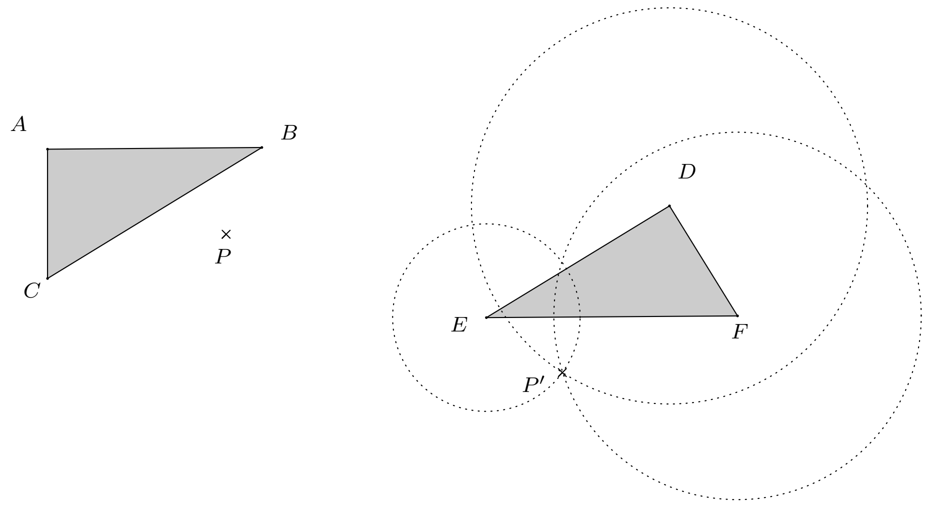


Figura 3.35: Teorema fundamental das isometrias — unicidade

3.6 Classificação das isometrias

Teorema 3.6.1 *Seja f uma isometria no plano: então f é uma translação, ou uma rotação, ou uma reflexão ou uma reflexão deslizante.*

Demonstração: Conforme provado anteriormente no Teorema Fundamental das isometrias, Teorema 3.5.1, se dois triângulos forem congruentes, então existe e é única a isometria f, que transforma um triângulo no outro, podendo f ser expressa pela composta de, no máximo, três reflexões: $f = \sigma_r \circ \sigma_s \circ \sigma_t$.

Assim, conforme o número de reflexões necessárias para definir f, a isometria é de cada uma das classes referidas na hipótese do teorema.

Uma reflexão: $f = \sigma_t$, sendo σ_r e σ_s iguais à identidade. Trata-se então de uma reflexão.

Duas reflexões: $f = \sigma_s \circ \sigma_t$, sendo σ_r igual à identidade. Consoante a posição relativa das retas s e t, f será:

Retas s e t concorrentes: Neste caso f será uma rotação, conforme provado no Teorema 3.4.2, centrada no ponto de interseção entre as duas retas e de amplitude igual ao dobro do ângulo que as duas retas fazem entre si.

Retas s e t paralelas: neste caso f será uma translação, conforme provado no Teorema 3.4.3, associada ao vetor perpendicular às retas e de comprimento igual ao dobro da distância entre elas.

Três reflexões: $f = \sigma_r \circ \sigma_s \circ \sigma_t$. Consoante a posição relativa das três retas r, s e t, f será:

Retas r, s e t paralelas entre si: neste caso e de acordo com o teorema 3.4.4, f será uma reflexão.

Retas r, s e t concorrentes num ponto: neste caso e de acordo com o teorema 3.4.5, f será uma reflexão.

Retas s e t nem paralelas nem concorrentes: então o Teorema 3.4.6 indica que f será uma reflexão deslizante.

Conclusão: de acordo com o exposto acima, se f for uma isometria, então f será uma translação, rotação, reflexão ou reflexão deslizante. ∎

3.7 Propriedades das isometrias

As quatro isometrias do plano, devidamente identificadas e caraterizadas nas secções anteriores, apesar de pertencerem ao mesmo tipo de transformações geométricas, apresentam, no entanto, propriedades que as diferenciam.

Assim, se os quatro tipos de isometrias forem analisadas relativamente ao número de pontos fixos e à orientação dos ângulos, verifica-se que cada tipo de isometria é único.

Relativamente à orientação dos ângulos, podem-se diferenciar a reflexão e reflexão deslizante (estas duas isometrias trocam a orientação dos ângulos – ver figura 3.36) da translação e da rotação (estes dois tipos de isometrias mantém a orientação dos ângulos – ver figura 3.37).

No que diz respeito ao número de pontos fixos, e excluindo a identidade, podem-se colocar de um lado translação e reflexão deslizante (sem pontos fixos), e de outro a rotação e reflexão (com pelo menos um ponto fixo). Estes duas isometrias, ainda se podem distinguir completamente uma da outra, pois no caso da rotação, existe um e um só ponto fixo, enquanto que na reflexão o número de pontos fixos é infinito.

Na tabela 3.1, encontram-se resumidas as propriedades das quatro isometrias do plano.

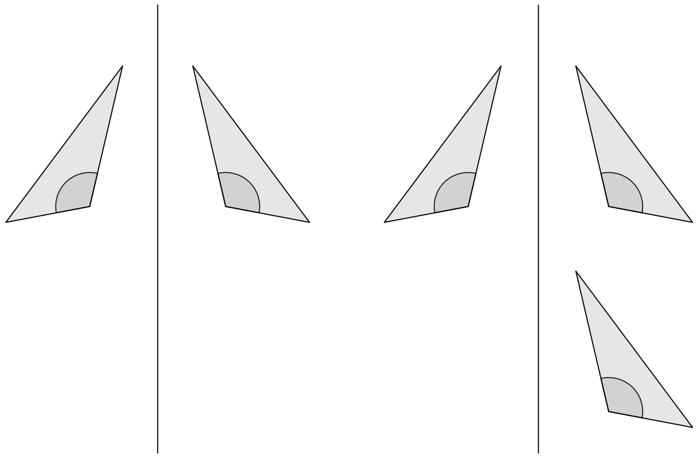


Figura 3.36: Reflexão e reflexão deslizante: inversão do sentido dos ângulos

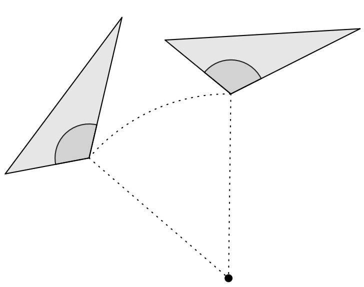


Figura 3.37: Rotação e translação: sem alteração no sentido dos ângulos

3.8 Isometrias: um pouco mais além... teoria de grupos

O objetivo desta secção é o de aproveitar o conhecimento adquirido pelo estudo das isometrias, para o aplicar a outra área da Matemática: a Álgebra, mais concretamente à teoria de grupos. Assim, mais à frente, serão utilizados alguns dos teoremas e proposições, demonstrados de forma geométrica nas várias secções deste capítulo, para justificar e exemplificar que Geometria e Álgebra, se completam mutuamente, partilhando conceitos, estruturas e conclusões. Aliás, é esta riqueza de conexões, neste

Isometria	Mantém orientação	Pontos fixos
Translação	sim	não
Rotação	sim	um só ponto fixo
Reflexão	não	número infinito
Reflexão deslizante	não	não

Tabela 3.1: Propriedades das isometrias do plano

caso entre duas áreas nobres e tradicionalmente distintas da Matemática, a Geometria e a Álgebra, que torna o estudo da Matemática aliciante, estimulante, um permanente desafio.

Embora no passado, o termo Álgebra estivesse associado a questões práticas relacionadas com o conceito de número, operações e suas propriedades e à resolução de equações, a partir do século XIX, reconheceu-se que muitas das ideias ditas «algébricas», se aplicavam também a objetos não numéricos, como por exemplo, vetores e transformações.

A evolução do estudo e posterior elevação da Álgebra à categoria de ramo nobre da Matemática, foi no início muito lenta, assistindo-se finalmente a uma «brusca explosão»: compreendeu-se que é possível estudar propriedades de qualquer operação algébrica sem especificar a natureza dos objetos sobre os quais essa operação atua, nem descrever como o resultado da operação deve ser calculado.

Na verdade, este estudo faz-se simplesmente postulando (ou seja, tomando por hipótese) um determinado conjunto de propriedades algébricas básicas, que é suposto a operação verificar, como por exemplo a comutatividade e a associatividade.

A Álgebra tornou-se, por fim, axiomática, embora com um atraso de mais de 2000 anos em relação à Geometria!

Esta axiomatização da Álgebra, exigiu a definição de estruturas algébricas abstratas. No caso mais simples, uma estrutura algébrica abstrata, é formada por conjunto não-vazio H, e uma operação binária em H, que não é mais do que uma função $\mu : H \times H \to H$. Diferentes conjuntos de axiomas referentes a esta operação μ, dão origem a diferentes estruturas algébricas.

Certas convenções simples são universalmente utilizadas. Se $\mu : H \times H \to H$ for uma operação binária em H, é vulgar utilizar um símbolo como por exemplo «$+$» ou «$\times$», para representar «$x + y$» ou «$x \times y$», em vez de «$\mu(x, y)$», ou ainda utilizando uma notação mais simplificada «xy» . A utilização das notações «$x+y$» e «xy» não significa que os símbolos representem as habituais operações de adição e multiplicação entre números. A convenção geralmente aceite é que o símbolo«$+$» só é utilizado quando a operação é comutativa — notação aditiva. Na maioria dos casos a notação utilizada é notação multiplicativa — esta será a notação utilizada nesta secção.

Relativamente ao conjunto de axiomas aplicados à estrutura algébrica em estudo, é importante referir que se forem impostos poucos axiomas, obtêm-se resultados bastante gerais, aplicáveis a muitas estruturas algébricas concretas. Se for aplicado um conjunto de axiomas mais complexo, os resultados serão porventura mais interessantes, mas certamente menos gerais, pois menos estruturas algébricas verificam os axiomas inicialmente definidos.

As isometrias, dadas as suas caraterísticas e a forma como se «transformam» umas nas outras, fornecem inúmeros exemplos, que nos servem para, agora mais facilmente, compreender algumas das noções e conceitos da teoria de grupos.

Em geral, cada disciplina interessa-se por certo tipo de transformações, aquelas que preservam as propriedades ou relações mais importantes para a disciplina em questão. Para a Geometria, por exemplo, interessam as transformações como translações, rotações, reflexões, semelhanças (que não são abordadas neste estudo) etc.

Refira-se que a «Geometria transformacional» é uma maneira alternativa de encarar a Geometria, que fundamenta uma caraterização ou classificação intrínseca (isto é, independente dos sistemas de axiomas) das Geometrias e permite um estudo profícuo de questões de simetria.

Um aspeto importante do estudo da Geometria transformacional, é a sua ligação com a álgebra, mais exatamente com a teoria de grupos. Na realidade, os grupos de transformações abrem novas perspetivas sobre o que é caraterístico das diferentes Geometrias de que há conhecimento: euclidiana, projetiva, hiperbólica, etc.

Conforme já referido no início deste capítulo, transformação geométrica é uma aplicação bijetiva de um plano (ou espaço) sobre si mesmo.

Definição: *Grupo* — um grupo, na notação multiplicativa, é uma estrutura da forma $G = (C, ., e)$, onde C é um conjunto não vazio, chamado o conjunto de suporte, $. : C \times C \to C$ é uma operação binária em C e $e \in C$, com as propriedades seguintes (onde, como é habitual, será escrito xy em vez de $x.y$):

1. Para quaisquer elementos $a, b, c \in C, (ab)c = a(bc)$ — a operação . é associativa em C.

2. Para qualquer elemento $a \in C$, $ae = ea = a$ — e é o *elemento neutro* para a operação . em C.

3. Para todo o elemento $a \in C$, existe um elemento $b \in C$ tal que $ab = ba = e$ — existência de inverso (notação normalmente utilizada para indicar o inverso de x: x^{-1}).

O grupo $G = (C, ., e)$, diz-se grupo *comutativo* ou *abeliano* se, adicionalmente tiver a seguinte propriedade:

4. Para quaisquer elementos $a, b \in C, ab = ba$.

Definição: *Subgrupo* — um subgrupo de C é um subconjunto não vazio C' tal que:

1. Para quaisquer elementos $x, y \in C', xy \in C'$.

2. Para qualquer elemento $x \in C'$, $x^{-1} \in C'$.

Refira-se que um subgrupo C' de um grupo C é um grupo, relativamente à operação de $C' \times C'$ em C', que envia (x, y) em xy e que o elemento neutro de C' é o mesmo elemento neutro de C.

Utilizando e aplicando as definições acima (grupo, grupo comutativo, subgrupo) às isometrias, ver-se-á que este tipo de transformações pode ser usado para, naturalmente, melhor explorar e explicar a teoria de grupos. Indicam-se de seguida vários exemplos de fácil leitura e compreensão. Conforme já referido, a maior parte das situações já tinha sido anteriormente justificada, embora pontualmente tenha sido necessário efetuar novas demonstrações.

Nesta secção, e sem perder o rigor, é cometido o «abuso» de chamar grupo ao conjunto de suporte, visto que não há confusão possível sobre a operação — a composição (de isometrias, rotações, reflexões, etc.) — e o elemento neutro — a identidade.

As bijeções de um conjunto em si próprio formam um grupo, relativamente à composição. Em particular, isto tem lugar quando o conjunto em questão é $\mathbb{R}^2$.

O conjunto formado pelas isometrias do plano, que será representado por $ISOM$, juntamente com a composição de isometrias, forma um grupo. Com efeito, a composta de duas isometrias é uma isometria (pela proposição 3.4.1) e será visto mais à frente (proposições 3.8.1 e 3.8.2) que cada isometria tem inversa, a qual também é uma isometria. Logo, $ISOM$ é um subgrupo do grupo das bijeções em $\mathbb{R}^2$. $ISOM$ não é um grupo comutativo, como será visto mais à frente.

As isometrias que preservam a orientação, translação e rotação, com a composição, formam um subgrupo, que será representado por $ISOM_+$. Este caso também não é um grupo comutativo, conforme posteriormente será justificado.

Conforme já foi anteriormente demonstrado no teorema 3.4.1, o resultado obtido pela composição de translações, será sempre uma translação, podendo ser a translação associada ao vetor nulo — identidade — no caso dos vetores serem simétricos, como é óbvio. Refira-se também que, se τ for uma translação, então τ^{-1} também é uma translação, pois se τ for a translação associada ao vetor $\overrightarrow{v}$, a sua inversa é a translação associada ao vetor $-\overrightarrow{v}$. Além disto, quando se compõem translações, qualquer que seja a ordem pela qual elas são efetuadas, o resultado final é sempre o mesmo, podendo-se concluir que as translações formam um subgrupo comutativo de $ISOM$ e que, portanto, formam um grupo comutativo.

As rotações com a composição, não formam um subgrupo, porque conforme referido e demonstrado no teorema 3.4.7, a composição de duas rotações, pode dar origem a uma translação, no caso da soma das amplitudes das duas rotações, ser igual a 360°. No entanto, as rotações em torno de um ponto fixo, (por exemplo a origem), formam um subgrupo comutativo: qualquer que seja a ordem da composição das rotações, o resultado final é sempre o mesmo.

As isometrias que invertem a orientação, não formam um subgrupo, pois quando se compõem duas isometrias que invertem a orientação, obtém-se uma isometria que preserva a orientação. Assim, quando se compõem duas reflexões, por exemplo, o resultado final é uma translação ou uma rotação, consoante os eixos de reflexão forem paralelos (ver teorema 3.4.3) ou concorrentes (ver teorema 3.4.2).

A proposição seguinte e respetiva demonstração, vão comprovar a propriedade que refere a existência de inverso (terceira propriedade indicada na definição de grupo).

Proposição 3.8.1 *Seja φ uma qualquer isometria do plano. Então, existe uma função φ^{-1} tal que*

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = e.$$

Demonstração: Sejam A, B, $\varphi(A)$ e $\varphi(B)$, dois pontos e as respetivas imagens.

Então

$$\varphi(A) = \varphi(B) \Leftrightarrow d(\varphi(A), \varphi(B)) = 0 \Leftrightarrow d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B.$$

Fica assim provado que φ é injetiva.

Sejam A, B e C três pontos não colineares, e $D = \varphi(A)$, $E = \varphi(B)$ e $F = \varphi(C)$, as respetivas imagens. Seja P' um ponto de $\mathbb{R}^2$: P' é a imagem de um ponto P, que se encontra na interseção das seguintes circunferências (ver figura 3.35 na página 52):

— centro em A e raio $d(D, P')$

— centro em B e raio $d(E, P')$

— centro em C e raio $d(F, P')$

Então $\varphi(P) = P'$, concluindo-se que φ é sobrejetiva. Uma vez que a isometria φ é simultaneamente injetiva e sobrejetiva, então é uma bijeção: esta é uma condição necessária e suficiente que comprova a existência de φ^{-1}, ou seja a função inversa. Resumindo, qualquer que seja a isometria $\varphi \in ISOM$, φ é invertível. Refira-se que o facto de cada isometria φ ser uma bijeção, também se poderia deduzir de se poder considerar φ como composta de reflexões, e de que cada reflexão ser uma bijeção. ∎

Já foi anteriormente provado (proposição 3.4.1) que o resultado da composição de duas isometrias, é uma isometria. A proposição seguinte e respetiva demonstração, provarão que a inversa de uma isometria continua a ser uma isometria, o que tem como consequência que as isometrias do plano com a composição de isometrias, formam um grupo.

Proposição 3.8.2 *Seja $\varphi \in ISOM$. Então $\varphi^{-1} \in ISOM$.*

Demonstração: Considerem-se dois pontos A e B. Então $d(\varphi^{-1}(A), \varphi^{-1}(B)) = d(\varphi(\varphi^{-1}(A)), \varphi(\varphi^{-1}(B))) = d(A, B)$, podendo-se concluir que $\varphi^{-1} \in ISOM$. ∎

O grupo das isometrias, $ISOM$, no entanto não é um grupo comutativo, como se pode concluir através da análise do caso a seguir ilustrado: trata-se da composição de duas rotações, $R_1(C_1, 90°)$ e $R_2(C_2, 90°)$, com $C_1 \neq C_2$, aplicadas ao ponto C_1.

Conforme é ilustrado nas figuras 3.38 e 3.39, o resultado da composição das duas rotações, R_1 e R_2 é diferente, conforme a ordem em que as rotações forem realizadas.

Efetuou-se a rotação do ponto C_1, e no caso em que foi primeiro realizada a rotação R_1, seguida da rotação R_2, obteve-se o ponto A. Na situação em que as rotações foram realizadas por ordem inversa, primeiro R_2 e depois R_1 a posição final do ponto C_1 é o ponto B, ou seja,

$$R_2(C_2, 90°) \circ R_1(C_1, 90°)(C_1) = A$$

e

$$R_1(C_1, 90°) \circ R_2(C_2, 90°)(C_1) = B$$

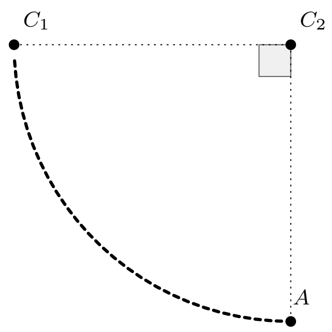


Figura 3.38: Ordem das rotações: $R_2 \circ R_1$

Conclusão: $ISOM$ não é um grupo comutativo.

A mesma conclusão pode ser obtida se se considerar o subgrupo das isometrias que preservam a orientação: $ISOM_+$. Este subgrupo também não é comutativo: o exemplo que confirma esta afirmação é o mesmo utilizado para demonstrar que $ISOM$ não é grupo comutativo: quando se fazem duas rotações centradas em pontos distintos, o resultado final depende da ordem em que as rotações são efetuadas.

Definição: *Grupo gerado por um conjunto* — seja G um grupo e C um subconjunto de G: $C \subset G$. Diz-se que G é gerado por C, se qualquer elemento de G for produto de elementos de G, cada um dos quais está em C ou tem inverso em C.

Em todos os casos analisados nesta secção, o conjunto C será tal que o inverso de qualquer elemento de C também estará em C. Resulta da definição que dizer que G é gerado por um tal conjunto C é o mesmo que dizer que qualquer elemento de G é produto de elementos de C.

Assim, pode-se afirmar que o grupo $ISOM$ é gerado por reflexões — já foi provado neste capítulo que qualquer isometria do plano, pode ser obtida pela composição de reflexões: teorema 3.5.1.

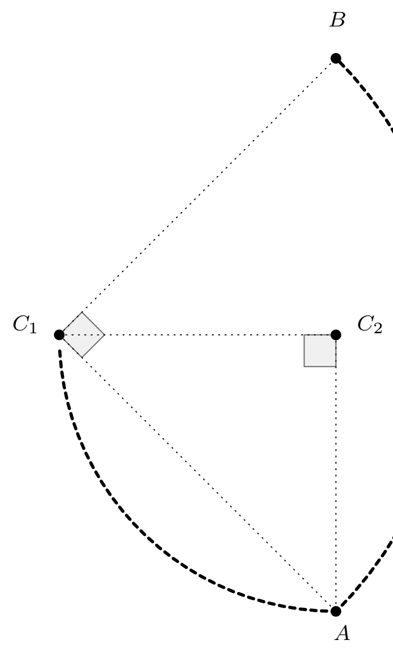


Figura 3.39: Ordem das rotações: $R_1 \circ R_2$

Outro exemplo de grupo gerado por um conjunto, é o caso do grupo $ISOM_+$ que é gerado por rotações (já foi provado neste capítulo que a composição de rotações dá origem a uma rotação ou a uma translação — ver proposição 3.4.7). Falta no entanto acrescentar que qualquer translação pode ser obtida como a composta de rotações.

A figura 3.40, ilustra o exemplo da translação do segmento de reta $[AB]$, segundo o vetor $\overrightarrow{v}$, obtendo-se $[A''B'']$: esta translação pode ser substituída por duas rotações de 180° de amplitude cada uma, e com centro nos pontos médios de BB' e de $B'B''$, respetivamente — ver figura 3.41. Visto que as translações podem ser obtidas pela composição de meias-voltas (rotações de 180° de amplitude), as translações e as meias-voltas também formam um subgrupo de $ISOM$.

Refira-se que as duas rotações têm 180° de amplitude cada uma, mas existem outras composições possíveis de rotações: a soma das respetivas amplitudes tem que ser 360°, e a localização de C_2 dependendo da localização de C_1, ou vice-versa.

Na figura 3.42 manteve-se a localização de C_1, tendo a rotação em torno deste ponto uma amplitude de 100°. A localização de C_2 é obtida pela intersecção das mediatrizes entre A' e A'' e entre B' e B''. A rotação em torno de C_2 tem uma amplitude de 260°. A soma das amplitudes das duas rotações é, obviamente, $100° + 260° = 360°$.

Definição: *Subgrupo Normal* — diz-se que um subgrupo H de um grupo G é um subgrupo normal se, para cada $g \in G$ e cada $h \in H$, $g \circ h \circ g^{-1} \in H$.

O subgrupo $ISOM_+$ é um subgrupo normal de $ISOM$: $g \in ISOM$, $h \in ISOM_+$, então $g \circ h \circ g^{-1} \in ISOM_+$. No caso de g ser por exemplo, uma reflexão (não

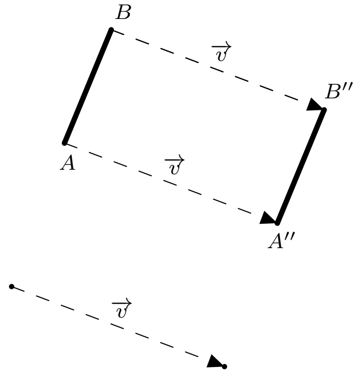


Figura 3.40: Translação de um segmento de reta

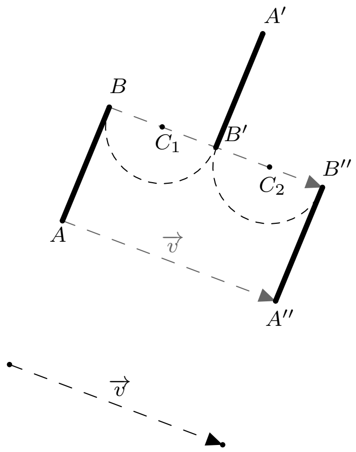


Figura 3.41: Translação como composta de duas rotações — I

mantém a orientação), então g^{-1} também é uma reflexão (também não mantém a orientação). Como h é uma isometria que preserva a orientação, e como compondo estas três isometrias, vão existir duas trocas de orientação, o que acaba por resultar é uma isometria que preserva a orientação, o que confirma a afirmação inicial.

Se r for uma reflexão, então $\{Id, r\}$ é um subgrupo de $ISOM$, mas não é um subgrupo normal. Por exemplo, considere-se uma translação τ por um vetor $\vec{v}$ não nulo, e perpendicular à reta s relativamente à qual se está a fazer a reflexão. Seja $P \in s$. Então

$$\tau^{-1}(r(\tau(P))) = \tau^{-1}(r(P + \vec{v})) = \tau^{-1}(r(P - \vec{v})) = P - 2\vec{v} \neq P$$

Logo $\tau^{-1} \circ r \circ \tau$, nem é r, nem é a identidade, pois ambas estas funções enviam P em P. Por outras palavras, $\tau^{-1} \circ r \circ \tau \notin \{Id, r\}$. Na figura 3.43 ilustra-se esta situação: o

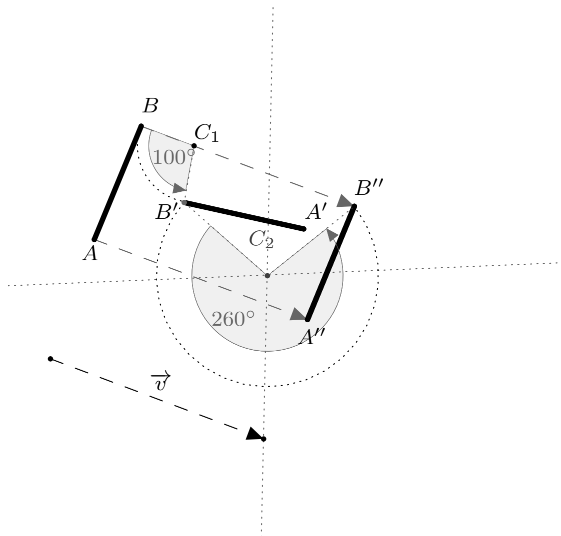


Figura 3.42: Translação como composta de duas rotações — II

ponto P é enviado em P', por $\overrightarrow{v}$, sendo de seguida P' enviado em P'', por reflexão em s, e finalmente, P'' é enviado em P''', por $-\overrightarrow{v}$. Conforme se pode observar, o ponto P e o ponto P''' não são coincidentes, o que confirma a afirmação acima.

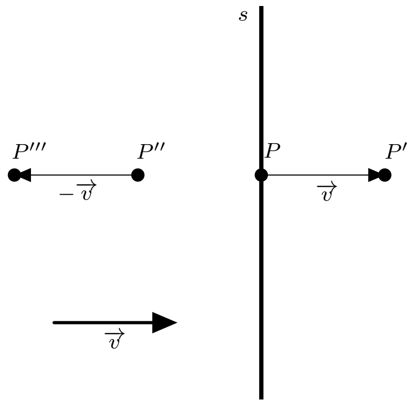


Figura 3.43: Subgrupo não normal: $\tau^{-1} \circ r \circ \tau$

Definição: *Ordem de um elemento g de um grupo* — ordem de um elemento g de um grupo é o menor número natural n, tal que $g^n = Id$, caso tal número exista e é ∞ nos restantes casos.

A ordem de $r \in ISOM$, sendo r uma reflexão, é 2, pois após duas reflexões sucessivas no mesmo eixo, obtém-se a situação inicial, ou seja é igual à identidade.

A ordem de $\tau \in ISOM$, sendo τ uma translação, é ∞ (exceto no caso de $\tau = Id$), pois não existe nenhum número natural tal que $\tau^n = Id$: se forem feitas translações sucessivas e segundo o mesmo vetor, nunca é possível obter a situação inicial.

Relativamente à definição acima, e sendo $g, h \in ISOM$, é importante referir que não é possível determinar a ordem de $g \circ h$ a partir das ordens de g e de h. Por exemplo, as reflexões têm ordem 2, mas a composta de duas reflexões pode ter qualquer ordem (incluindo ∞).

De seguida são dados alguns exemplos de ordem de elementos pertencentes a $ISOM$, evidenciando que $ISOM$ tem elementos de todas as ordens possíveis. É interessante referir que, uma vez que qualquer isometria pode ser obtida por composição de reflexões, que têm ordem 2, $ISOM$ é um exemplo de um grupo gerado por um conjunto de elementos de ordem 2 e que tem elementos de todas as ordens.

Ordem 1: a função identidade, Id, tem ordem 1.

Ordem 2: seja r uma reflexão. Então $r \circ r = Id$ e, portanto, r tem ordem 2.

Ordem n: sejam r_1 e r_2 reflexões em retas que formam um ângulo de π/n. Então $r_1 \circ r_2$ é uma rotação de ângulo $2\pi/n$, e portanto tem ordem n.

Ordem ∞: sejam r_1 e r_2 reflexões em retas estritamente paralelas. Então $r_1 \circ r_2$ é uma translação não trivial (translação associada a um vetor não nulo), e portanto tem ordem infinita.

Nesta secção, foi analisada uma ligação entre a Geometria e a Álgebra, tendo servido os exemplos geométricos para introduzir conceitos algébricos. Esta conexão também pode ser observada em alguns enunciados (geométricos) de teoremas, nos quais aparecem referências a alguns dos subgrupos já mencionados do grupo $ISOM$ (grupo das isometrias do plano).

O Teorema de Bolyai-Gerwin, cuja demonstração pode ser consultada em [2], afirma que se P_1 e P_2 forem dois polígonos com a mesma área, é possível decompor P_1 num número finito de bocados e aplicar a cada bocado uma isometria que preserva a orientação, obtendo-se então P_2.

O Teorema de Hadwiger-Glur, cuja demonstração pode ser consultada na mesma referência bibliográfica, é uma versão do teorema anterior, na qual se substituiu «isometria que preserva a orientação» por «translação ou meia volta». Repare-se que as isometrias mencionadas neste teorema formam um subgrupo de $ISOM_+$, conforme referido na página 60.

Capítulo 4

Conclusão

O ensino da Matemática, a motivação, a vontade e a curiosidade em aprender, e os resultados obtidos pelos alunos, quer em provas ao nível de escola, quer em provas e exames nacionais, são assuntos que estão longe de se encontrarem conciliados.

Considero a motivação que os alunos demonstram, quando confrontados com aulas de diferentes formatos (por exemplo quando podem utilizar um computador), um bom indício que algo pode ser feito no sentido de melhorar as aprendizagens dos alunos. Sempre fui da opinião que, estando os alunos motivados para ouvirem e perceberem, todos os outros obstáculos se tornam mais fáceis de ultrapassar.

O tópico central desta tese, as isometrias, é um tema que recentemente sofreu grandes alterações, nomedamente na profundidadade e rigor com que deverá ser lecionado. Assim, pessoalmente, não poderia ter sido mais oportuno, ter efetuado esta investigação.

Este trabalho encontra-se dividido vários capítulos, considerando dois deles fundamentais. No segundo capítulo, são descritas as aplicações informáticas criadas em HTML, para serem utilizadas pelos alunos, com inclusão de vários *applets*, realizados em *GeoGebra*. No terceiro capítulo, foi efetuado um reconhecimento profundo das bases teóricas que suportam e sustentam o conhecimento das isometrias e suas propriedades, incluíndo uma abordagem à teoria de grupos (explorando a conexão da Álgebra e da Geometria).

Esta dualidade, por um lado o rigor no abordar dos temas, por outro torná-los simples e atrativos para os alunos, é um desafio que nós, professores de Matemática do ensino básico e secundário, nunca podemos perder de vista. Acrescento que estará na gestão partilhada destes dois princípios orientadores, a pedra de toque de um ensino da Matemática com sucesso e que nos faça sentir, professores e alunos, que aprender Matemática é algo agradável, positivo e fundamental.

Considero este trabalho um ponto de partida para, no futuro realizar outras reflexões noutros tópicos da Matemática, pois não tenho dúvida que as novas tecnologias podem e devem ser utilizadas como meios facilitadores no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. A criação de páginas em HTML para os alunos utilizarem, quer na própria aula, quer como complemento e consolidação de conhecimentos, para aqueles alunos mais curiosos, será uma forma de os motivar e certamente de motivar também outros professores.

Referências

[1] P. V. Araújo: *Curso de Geometria*, Trajectos Ciência, Gradiva, 2ª edição 1999.

[2] V. G. Boltyanskii: *Equivalent and Equidecomposable Figures*, Topics in Mathematics, D. C. Heath and Company, Boston 1963

[3] R. L. Fernandes, M. Ricou: *Introdução à álgebra* — Coleção Ensino da Ciência e da Tecnologia, IST Press — 2004

[4] A. J. Franco de Oliveira: *Geometria Euclideana.* Universidade Aberta 1995

[5] A. J. Franco de Oliveira: *Transformações Geométricas.* Universidade Aberta 1997

[6] F. Klein: *Le programme d'Erlanger* — Collection «Discours de la Methode», Gauthier-Villars Éditeur 1974

[7] M. A. Neves, L. Guerreiro, A. Neves: *Matemática 9º ano*, Porto Editora 2004

[8] D. Solow: *How To Read and Do Proofs — An Introduction to Mathematical Thought Process* J. Wiley & Sons 2002

[9] D. K. Washburn e D. W. Crowe: *Symmetries of Culture — Theory and Practice of Plane pattern Analysis*, University of Washington Press, Third printing, 1998

[10] H. Wussing: *The Genesis of the Abstract Group Concept — A Contribution to the History of the Origin of Abstract Group Theory*, The MIT Press, 1984

[11] José Carlos Santos: *Formação Complementar em Matemática I* `http://www.fc.up.pt/mp/jcsantos/PDF/FCMatI.pdf`

[12] Michael de Villiers: *Some pitfalls of dynamic geometry software* — from Teaching & Learning Mathematics, No. 4, Feb 2007, pp. 46–52, a journal of the Association of Mathematics Education (AMESA). `http://academic.sun.ac.za/mathed/AMESA`

[13] Ministério da Educação (1990) — *Programa do 1º ciclo do ensino básico.* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação

[14] Ministério da Educação (1991) — *Organização curricular e programas (2º ciclo do ensino básico).* Lisboa: Imprensa Nacional da Casa da Moeda

[15] Ministério da Educação (1991) — *Organização curricular e programas (3º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Imprensa Nacional da Casa da Moeda

[16] Ministério da Educação (2001) — *Currículo nacional da ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Básico

[17] Ministério da Educação (2007) — NPMEB: Novo Programa de Matemática do Ensino Básico, Dezembro de 2007 `http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/028_ProgramaMatematicaEnsinoBasico.pdf`

[18] Ministério da Educação (2001) — Programa de Matemática do Ensino Secundário — Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas, 2001 `http://www.dgidc.min-edu.pt/ensinosecundario/index.php?s=directorio&pid=2&letra=M`

[19] NCTM: Princípios e Normas para a Matemática Escolar, *The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.*, APM — Associação de Professores de Matemática, 2ª edição, Junho de 2008

[20] Revogação do Currículo Nacional do Ensino Básico — Diário da República, 2.ª série — N.º 245 — 23 de Dezembro de 2011